# III. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

## 3.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Hemos estado manejando en este trabajo expresiones del tipo $y = x^n$ en donde "$x$" es una variable llamada base y "$n$" una constante llamada exponente, si intercambiamos de lugar la base y el exponente obtenemos una expresión del tipo $y = n^x$ la cual recibe el nombre de función exponencial, siendo muy importante su estudio para la solución de muchos problemas.

Definición:

Si $a > 0$ entonces la función exponencial con base $a$ se define como: $y = f(x) = a^x$ donde $x$ es cualquier número real.

Su dominio son los números reales $D = (-\infty, \infty)$, su imagen o rango son los números reales positivos $R = (0, \infty)$ .

Observando que para $a > 1$ si "$x$" crece "$y$" también lo hace rápidamente y si "$x$" disminuye "$y$" se acerca a cero lo cual se ilustra con las siguientes gráficas.

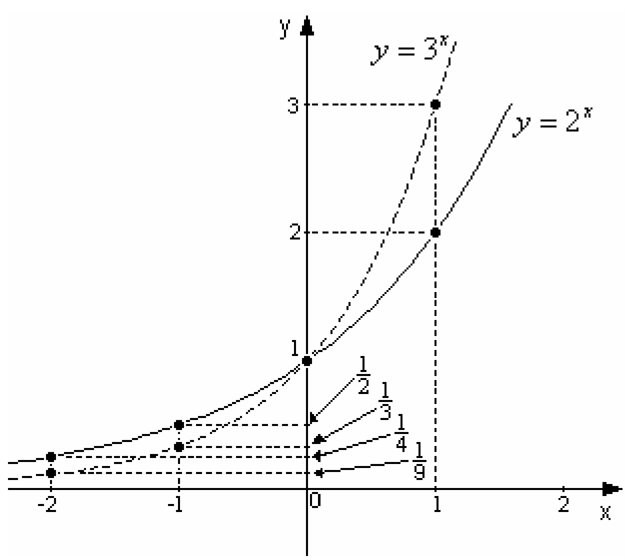
**EJEMPLOS**

**1)** Dibuje las gráficas de las funciones exponenciales $y = 2^x$ y $y = 3^x$, sobre el mismo sistema coordenado.

Solución

Como su dominio son todos los números reales $D = (-\infty, \infty)$, tabulando algunos valores se tiene:

| $x$ | $2^x$ | $3^x$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 9 |
| 0 | 1 | 1 |
| -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| -2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ |



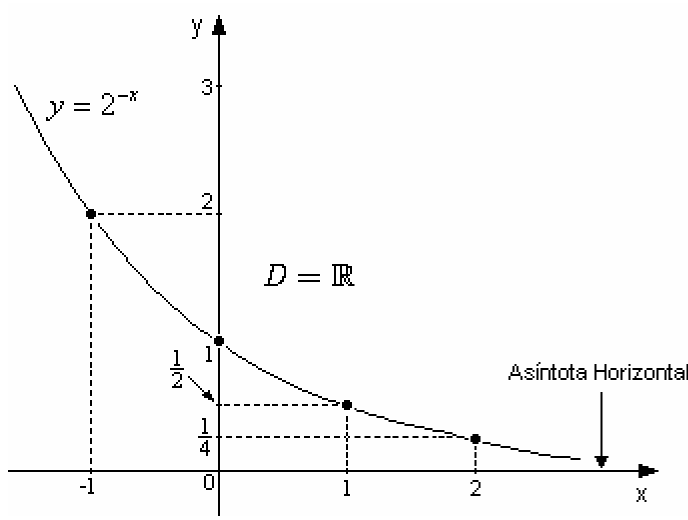
Se observa que el eje de las equis, de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal de este tipo de curvas.

**2)** Trace la gráfica de la función $y = 2^{-x}$

Solución

Tabulando:

| $x$ | $2^{-x}$ |
|---|---|
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| -1 | 2 |
| -2 | 4 |
| -3 | 8 |




En los ejemplos 1) y 2) se observa que el punto $(0,1)$ es común a todas las gráficas de funciones del tipo $y = a^x$ (todo número real excepto cero elevado a la cero potencia es igual a uno).

Existe un número irracional "e" utilizado con mucha frecuencia en funciones exponenciales, dado que $y = e^x$ tiene infinidad de aplicaciones prácticas como teóricas. En cursos superiores se aclarará la enorme importancia que tiene el número "e" en el desarrollo de la MATEMÁTICA. El valor aproximado del número "e" es $2.71828\ldots$ y la gráfica de $y = e^x$ quedará entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ del ejemplo 1).

**3)** El número "$y$" de bacterias en millones, en un cultivo, "$t$" horas después de iniciado el experimento viene dado por $y = f(t) = 20e^{\frac{t}{3}}$. Se pregunta:

a) El número de bacterias al principio del experimento.
b) El número de bacterias después de una hora y de dos horas.
c) Graficar la función.

Solución

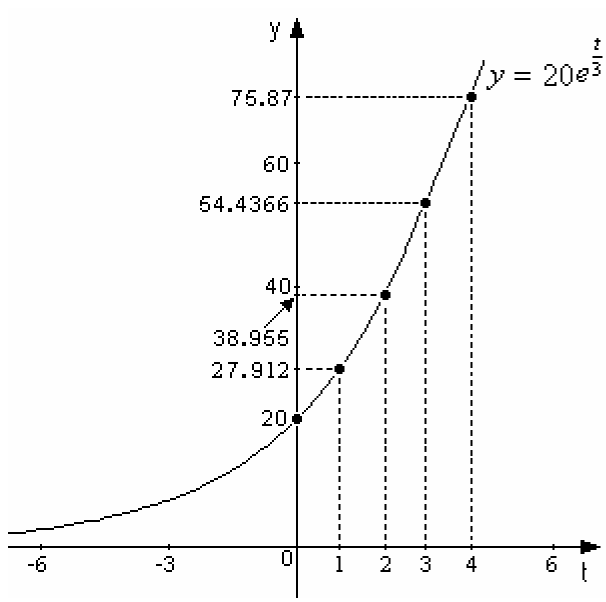
a) Como $t = 0$ ; $y = 20e^{\frac{0}{3}} = 20e^0 \Rightarrow y = 20$. Existían 20 millones de bacterias al iniciar el experimento.

b) Si $t = 1 \Rightarrow y = 20e^{\frac{1}{3}} = 20(1.3956) = 27.912$. Existen 27.912 millones de bacterias después de una hora.

Si $t = 2 \Rightarrow y = 20e^{\frac{2}{3}} = 20(1.9477) = 38.955$. Existen 38.955 millones a las dos horas, casi el doble que al inicio del experimento.

Para dibujar la gráfica obtendremos el número de bacterias a las 3 y 4 horas para obtener más puntos de la gráfica.

$$y(3) = 20e^{\frac{3}{3}} = 20(2.7183) = 54.4366$$
$$y(4) = 20e^{\frac{4}{3}} = 20(3.7937) = 75.874$$

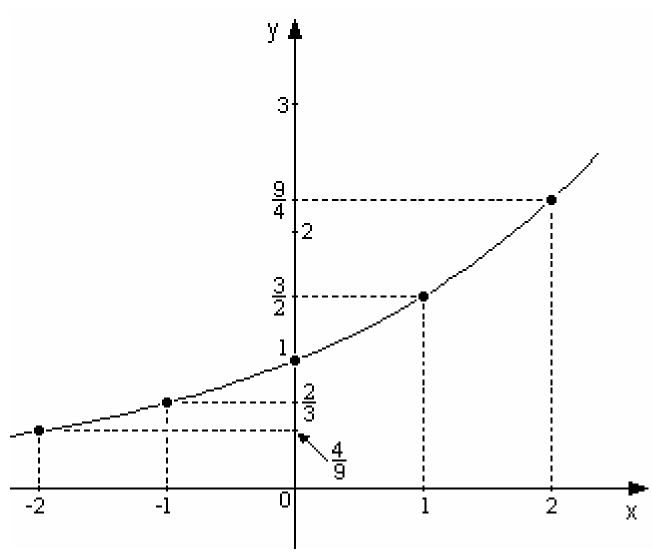



$x$: tiempo en horas
$t$: millones de bacterias

**4)** Traza la gráfica de la función $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

<u>Solución</u>

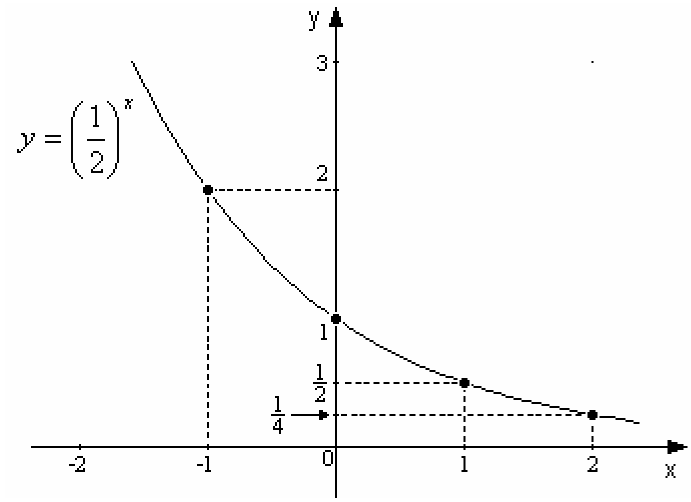
| $x$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$ |
|---|---|
| 2 | $\frac{9}{4}$ |
| 1 | $\frac{3}{2}$ |
| 0 | 1 |
| -1 | $\frac{2}{3}$ |
| -2 | $\frac{4}{9}$ |



**5)** Dibuja la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución

| $x$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|---|---|
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| -1 | 2 |
| -2 | 4 |




## EJERCICIOS

Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

**1)** $y = 4^x$

**2)** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

**3)** $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

**4)** $y = e^{-x^2}$

**5)** Obtener la estatura $y$ en centímetros para un niño de 2 años de edad si esta determinada por la función: $y = 79 + 6.4t - e^{3.25-t}$

## 3.2. FUNCIÓN LOGARITMO

Como ya hemos visto anteriormente, la inversa de una función exponencial $y = a^x$, con $a > 0$, se obtiene intercambiando la "$y$" por la "$x$" y la "$x$" por la "$y$": $x = a^y$, y al despejar de esta última la variable "$y$", se obtiene la función logarítmica $y = \log_a x$, que se lee "logaritmo de $x$ de base $a$" y como el dominio y el rango de la función exponencial $y = a^x$ son: $D = (-\infty, \infty)$, $R = (0, \infty)$, entonces en la función logarítmica $y = \log_a x$, se cambian los papeles, resultando que su dominio y su rango son $D = (0, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$.

Definición:

$y = \log_a x$ si y solo si $x = a^y$
con $a > 0$, y $x > 0$

Lo que verbalmente podemos decir "el logaritmo de un número "$x$" es el exponente "$y$" al cual se debe elevar la base "$a$" para obtener dicho número "$x$".

**EJEMPLOS**

**1)** Sobre el mismo sistema coordenado, bosquejar la gráfica de las funciones $y = 2^x$ y su inversa $y = \log_2 x$.

<u>Solución</u>

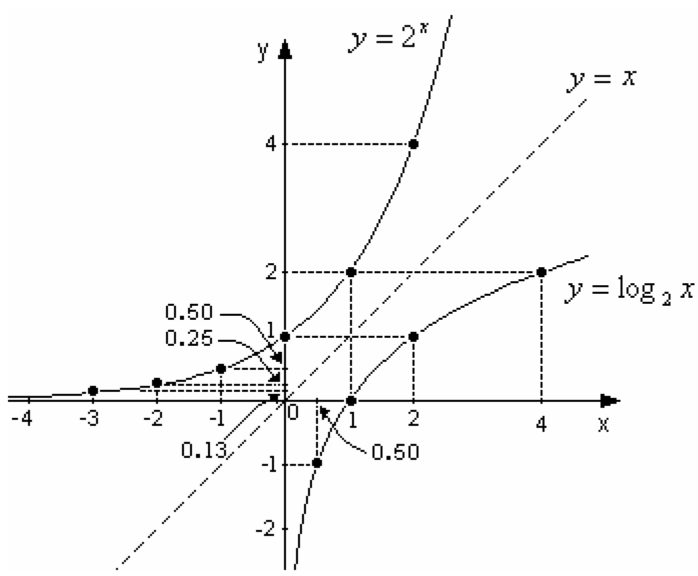
La inversa de la función $y = 2^x$ es $x = 2^y$, de la cual despejando la "$y$" se tiene $y = \log_2 x$ (que es una función logarítmica de base 2). Tabulando la función $y = 2^x$ y luego invirtiendo los valores de las coordenadas, se tiene la tabulación de su inversa $y = \log_2 x$ como sigue:

$y = 2^x$

| $x$ | $2^x$ |
|---|---|
| -3 | 0.13 |
| -2 | 0.25 |
| -1 | 0.50 |
| 0 | 1.00 |
| 2 | 4.00 |
| 3 | 8.00 |

$y = \log_2 x$

| $x$ | $\log_2 x$ |
|---|---|
| 0.13 | -3 |
| 0.25 | -2 |
| 0.50 | -1 |
| 1.00 | 0 |
| 4.00 | 2 |
| 8.00 | 3 |



**2)** Sobre el mismo sistema coordenado, bosquejar la gráfica de las funciones $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_3 x$.

<u>Solución</u>

Cuando la base de una función logarítmica es el número "$e$", es decir, $y = \log_e x$, se acostumbra escribir $y = \ln x$ y se le llama "función logaritmo natural". Como el número "$e$" se encuentra entre el 2 y el 3 $(2 < e < 3)$, la gráfica de la función $y = \ln x$ se localiza entre las gráficas de las funciones $y = \log_2 x$ y de $y = \log_3 x$ como se muestra en la figura.

Para graficar $y = \log_3 x$, de acuerdo con la definición es lo mismo que $x = 3^y$, por lo que se hace más fácil graficar esta última ya que las calculadoras científicas no pueden calcular logaritmos de base 3, por lo tanto, para tabular algunos valores de $x = 3^y$, proponemos algunos valores para "$y$" de su rango $R = (-\infty, \infty)$ como sigue:

$y = \log_3 x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^y$

| $x$ | $\log_3 x$ |
|---|---|
| 0.04 | -3 |
| 0.11 | -2 |
| 0.33 | -1 |
| 1.00 | 0 |
| 3.00 | 1 |
| 9.00 | 2 |
| 27.00 | 3 |

Si

$$y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0.04$$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.11$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3^0 = \frac{1}{3^0} = \frac{1}{1} = 1.00$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3^1 = 3.00$$

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3^2 = 9.00$$

$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^3 = 27.00$$

Para graficar $y = \ln x$ es lo mismo que $x = e^y$, tabulando con esta última expresión, tenemos:

$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$

| $x$ | $\ln x$ |
|---|---|
| 0.05 | -3 |
| 0.14 | -2 |
| 0.37 | -1 |
| 1.00 | 0 |
| 2.72 | 1 |
| 7.39 | 2 |
| 20.09 | 3 |

*Si*

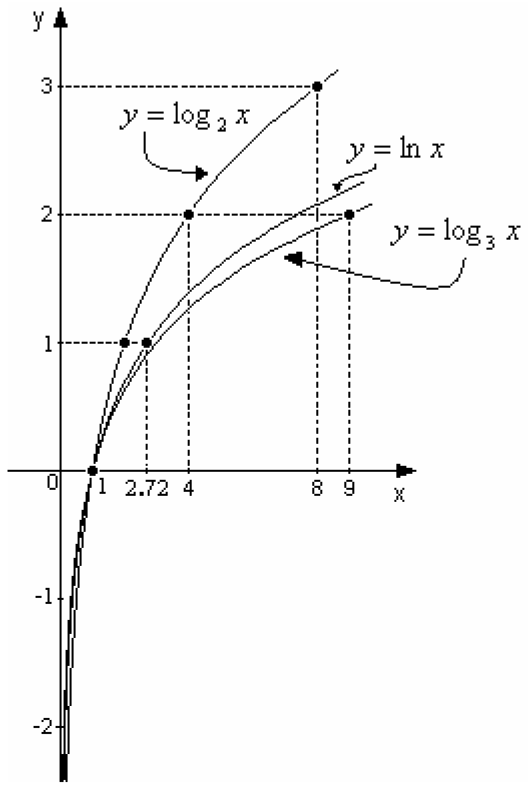
$$y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \cong 0.05$$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \cong 0.14$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e^1} \cong 0.37$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^0 = 1$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e^1 \cong 2.72$$




$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = e^3 \cong 20.09$

$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = e^2 \cong 7.39$

**Nota:** Si sabemos que por definición una función logarítmica, tiene su equivalente en forma exponencial. La graficación de funciones logarítmicas se facilita con el uso de la calculadora científica, con la función $\boxed{y^x}$, ya que en su mayoría, las calculadoras cuentan con las funciones $\boxed{\log}$ (logaritmo base 10) y con $\boxed{\ln}$ (logaritmos base $e$) únicamente.

**3)** Obtener la gráfica de la función $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Solución

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

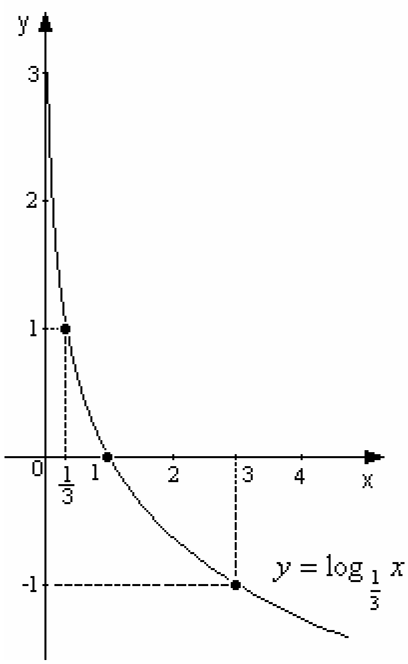
| $x$ | $\left(\frac{1}{3}\right)^y$ |
|---|---|
| 27 | -3 |
| 9 | -2 |
| 3 | -1 |
| 1 | 0 |
| 0.33 | 1 |
| 0.11 | 2 |
| 0.04 | 3 |

Si $y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 3^3 = 27$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1} = 3$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$




$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 0.33$

$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0.11$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = 0.04$

**4)** Obtenga la gráfica de la función $y = \log_2(-x)$

Solución

Como solo hay logaritmos para argumentos positivos, el argumento $(-x)$ será positivo si "$x$" toma valores negativos, por lo que el dominio de esta función son todos los reales negativos o lo que es lo mismo $D = (-\infty, 0)$, tabulando se tiene:

$y = \log_2(-x) \quad \Leftrightarrow \quad -x = 2^y \;;\; x = -2^y$

| $x$ | $\log_2(-x)$ |
|---|---|
| -0.13 | -3 |
| -0.25 | -2 |
| -0.50 | -1 |
| -1.00 | 0 |
| -2.00 | 1 |
| -4.00 | 2 |
| -8.00 | 3 |

Si $y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8} \cong -0.13$

$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} = -0.25$

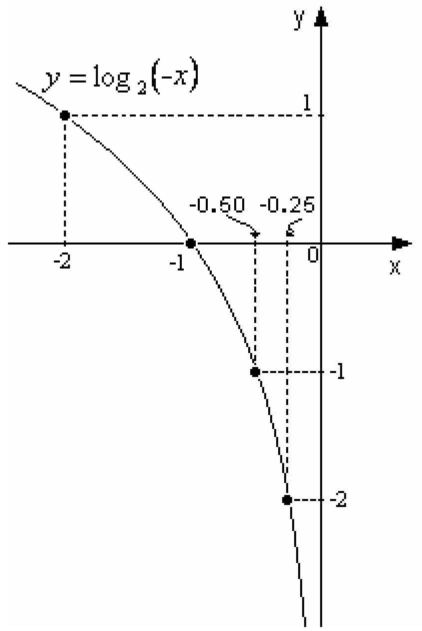
$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^{-1} = -\frac{1}{2^1} = -\frac{1}{2} = -0.50$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^0 = -1$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^1 = -2$

$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^2 = -4$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^3 = -8$




**5)** Graficar la función $y=-\log_3(-x)$

<u>Solución</u>

$$y=-\log_3(-x) \quad \Leftrightarrow \quad -y=\log_3(-x);\ -x=3^{-y}=\frac{1}{3^y}\ ;\ x=-\frac{1}{3^y}$$

| $x$ | $-\frac{1}{3^y}$ |
|---|---|
| -27 | -3 |
| -9 | -2 |
| -3 | -1 |
| -1 | 0 |
| -0.33 | 1 |
| -0.11 | 2 |
| -0.04 | 3 |

Si $y=-3 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^{-3}}=-3^3=-27$

$y=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^{-2}}=-3^2=-9$

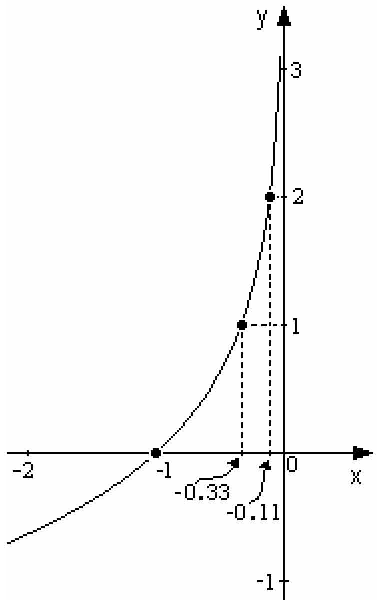
$y=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^{-1}}=-3^1=-3$

$y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^0}=-1$

$y=1 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^1}=-0.33$

$y=2 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}=-0.11$

$y=3 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{27}=-0.04$




El interés compuesto es un ejemplo de aplicación de este tipo de funciones, brevemente podemos explicarlo como sigue:

Si una persona deposita en el banco $1000.00 en una cuenta de ahorro donde el banco le paga una tasa de interés del 8% anual, al final del primer año la persona recibirá $1080.00, si no retira esta cantidad, para el siguiente año recibirá $1166.40 y asi sucesivamente.

Este tipo de problemas da origen al siguiente desarrollo conceptual.

| Año | Capital | Interés | Monto |
|---|---|---|---|
| 0 | 1000.00 | 0.00 | 1000.00 |
| 1 | 1000.00 | 80.00 | 1080.00 |
| 2 | 1080.00 | 86.40 | 1166.40 |
| 3 | 1166.40 | 93.31 | 1259.71 |
| •<br>•<br>• | •<br>•<br>• | •<br>•<br>• | •<br>•<br>• |

En general: si C es el capital inicial
i es la tasa de interés
t es el período de capitalización
n es el número de años
M es el monto capitalizado

La fórmula del interés compuesto es: $M = C\left(1+\frac{i}{t}\right)^{tn}$

**6)** Si Raúl deposita $30 000.00 en una cuenta de ahorro que le da un interés del 11.5% capitalizable trimestralmente, ¿cuánto recibirá después de 5 años?

Solución

$$M = C\left(1+\frac{i}{t}\right)^{tn} = 30\,000\left(1+\frac{0.115}{4}\right)^{4(5)} = 30\,000(1.02875)^{20} = 30\,000(1.7628)$$

$$\underline{M = \$52\,883.26}$$

Raúl recibirá al final del quinto año la cantidad anterior.

## EJERCICIOS

Obtener la gráfica de las siguientes funciones:

**1)** $y = \log x$

**2)** $y = \ln(2x)$

**3)** $y = \log_2 x^2$

**4)** $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)$

**5)** $y = \log_2(x+1)$

**6)** ¿A qué tiempo se debe invertir un capital de $\$100\,000.00$ al 20% anual compuesto, para triplicar el capital inicial?