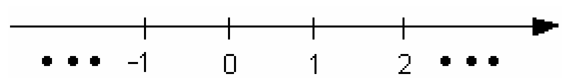
IV. SISTEMAS DE COORDENADAS Y ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

4.1. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN LA RECTA NUMÉRICA

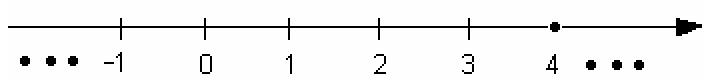
El método de coordenadas es un procedimiento que nos permite determinar la posición de un punto en el espacio, en un plano y en particular sobre la recta mediante el uso de números llamados coordenadas.

Por ejemplo, cuando viajamos por alguna carretera, la posición de un punto se indica en pequeños postes ubicados a un costado del camino, indicando el kilometraje, siendo este la coordenada de ese lugar.

La recta numérica o eje numérico es la recta sobre la que están indicados el origen de coordenadas, la unidad de medida y la dirección positiva mediante una flecha.



Una vez que se ha establecido una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de la recta, donde resulta que a cada punto de la recta corresponde un número determinado y viceversa. Para determinar la posición de un punto sobre esta recta numérica (o recta real), es suficiente designar un número, por ejemplo el 4 (esto significa que dicho punto se localiza a una distancia de 4 unidades de medida del origen de coordenadas y en la dirección positiva).



En general, la coordenada de un punto sobre la recta numérica, es el número que determina la posición de dicho punto sobre este eje.

La coordenada de un punto sobre la recta numérica, es igual a la distancia entre el punto y el origen de coordenadas de acuerdo con la unidad de medida elegida, con signo positivo si el punto se encuentra en la dirección positiva del origen y con signo menos en caso contrario.

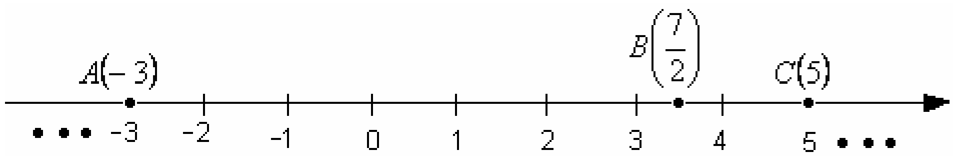
La coordenada del origen es el cero.

Es costumbre denotar puntos sobre la recta numérica como: $A(4),\ T\left(-\frac{3}{2}\right),\ M(10.2),\ S(a)$, etc.

EJEMPLOS

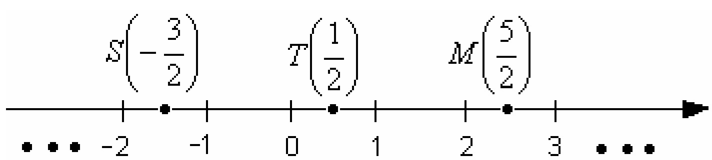
1) Localice sobre la recta numérica los puntos $A(-3)$, $B\left(\frac{7}{2}\right)$, $C(5)$.

Solución



2) Encuentre sobre la recta numérica dos puntos M y S que estén a la distancia de 2 unidades del punto $T\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solución



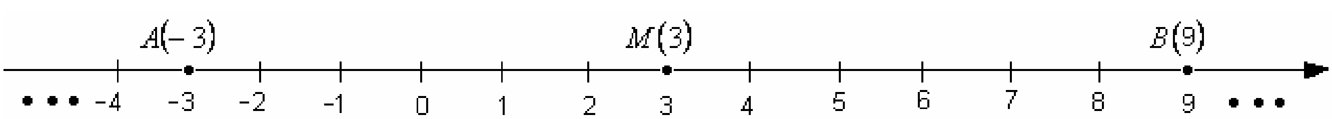
3) ¿Cuál de los puntos $A(a)$ y $B(-a)$ está a la derecha si $a < 0$?

Solución

Como "a" es negativa, entonces "$-a$" es positiva, por lo tanto el punto B está a la derecha del punto A.

4) Localice sobre la recta numérica los puntos $A(-3)$ y $B(9)$ y obtenga la coordenada del punto medio del segmento $\overline{AB}$

Solución



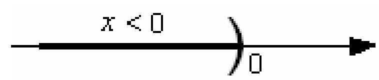
$\frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3$; $M(3)$

5) Señale sobre la recta numérica o recta real todos los puntos "x" para los cuales se cumple que:

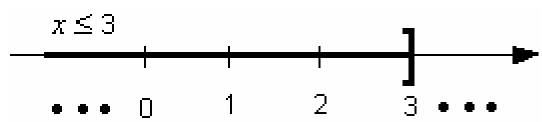
a) $x < 0$ b) $x \leq 3$ c) $x > \frac{5}{2}$ d) $-1 < x < 2$ e) $x^2 < 1$

<u>Solución</u>

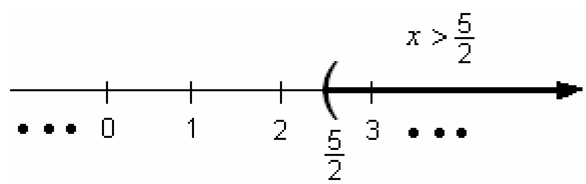
a)



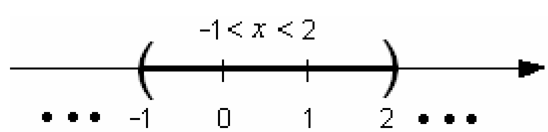
b)



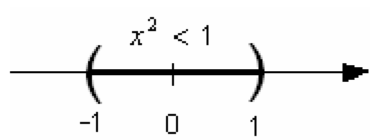
c)



d)



e)



EJERCICIOS

1) Marque sobre la recta numérica los puntos $A\left(-\frac{5}{4}\right)$, $B(0.2)$, $C(7)$, $D(-4.5)$, $E(0)$.

2) Marque sobre la recta numérica el punto $F(-3)$ y encuentre las coordenadas de dos puntos sobre la misma recta que estén a la distancia de 2.5 unidades del punto F .

3) ¿Cuál de los puntos A o B está a la derecha en cada inciso?

a) $A(x),\ B(2x)$ b) $A(c),\ B(c+2)$ c) $A(x),\ B(x^2)$ d) $A(x),\ B(x-a)$

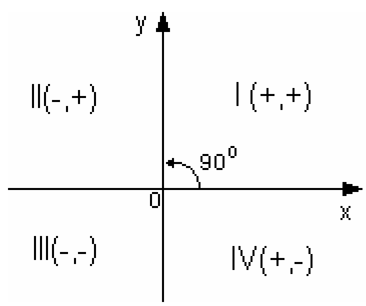
4) Localice sobre la recta numérica los puntos $M(-5)$ y $R(-1)$ y obtenga la coordenada del punto medio del segmento $\overline{MR}$.

5) Señale sobre la recta numérica los puntos "x", para los cuales se cumple:

a) $x \geq 0$ b) $x < 3$ c) $x \leq \frac{5}{2}$ d) $2 > x > -1$ e) $x^2 \geq 1$

4.2. COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES EN EL PLANO

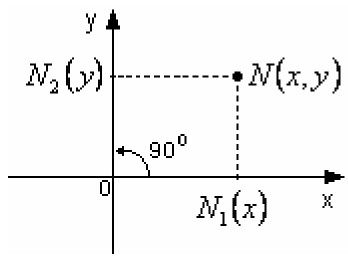
Recordemos el capítulo I que el Producto Cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ genera todo el Plano Cartesiano, en el que se han considerado 2 ejes o rectas numéricas (en los que generalmente las unidades de medida se toman iguales) perpendiculares entre si cuyo origen de coordenadas coinciden, al eje horizontal se le llama eje de las abscisas o eje x, al eje vertical se le llama eje de las ordenadas o eje y, quedando así definidas 4 regiones llamadas cuadrantes I, II, III y IV como se muestra en la figura.



La posición de cualquier punto sobre el Plano Cartesiano queda totalmente determinada cuando se conocen sus 2 coordenadas escribiéndose así: (x, y). En primer lugar se anota la <u>abscisa</u> (la x) y en segundo lugar se anota la <u>ordenada</u> (la y).

Tomemos sobre el plano un punto cualquiera N y tracemos desde él perpendiculares a los ejes, los puntos de intersección N_1 y N_2 se les llama proyecciones del punto N sobre los ejes coordenados, al punto N_1 le corresponde un número determinado x (su coordenada sobre este eje x), al punto N_2 le corresponde un número determinado y (su coordenada en este eje y). De esta manera, a cada punto situado sobre el plano coordenado le corresponden dos números x e y, llamados coordenadas rectangulares cartesianas del punto N y viceversa, a cada pareja ordenada de números (x, y) le corresponde un punto del Plano Coordenado Cartesiano, a esto se le llama una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números (x, y).

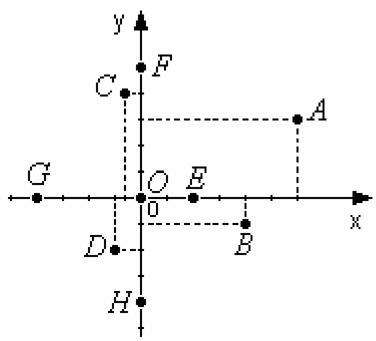
De este modo, las coordenadas rectangulares cartesianas de cualquier punto en el plano son las coordenadas de las proyecciones de este punto sobre los ejes coordenados.



EJEMPLOS

1) Localizar sobre el plano coordenado los siguientes puntos: $A(6,3)$, $B(4,-1)$, $C\left(-\frac{1}{2},4\right)$, $D(-1,-2)$, $E(2,0)$, $F(0,5)$, $G(-4,0)$, $H(0,-4)$, $O(0,0)$

<u>Solución</u>



2) Conteste cada uno de los siguientes incisos:

a) Sin dibujar, diga en qué cuadrante está situado el punto $A(2,-1)$.
b) Si la abscisa de un punto es negativa, ¿en qué cuadrante puede estar situado dicho punto?
c) Un punto situado sobre el eje x con coordenada -3, ¿cuáles son sus coordenadas en el plano?

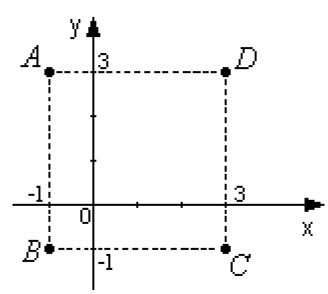
<u>Solución</u>

a) Cuarto cuadrante
b) En el tercero o el segundo cuadrante
c) $(-3,0)$

3) Halle cuatro puntos (cualesquiera) que sean los vértices de un cuadrado.

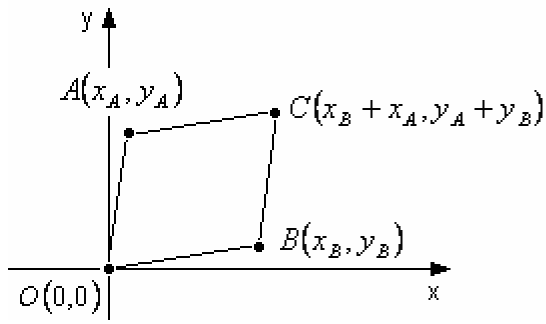
<u>Solución</u>

Por ejemplo los puntos $A(-1,3)$, $B(-1,-1)$, $C(3,-1)$, $D(3,3)$



4) Sobre el plano coordenado se dan los puntos $A(x_A, y_A)$, $O(0,0)$, $B(x_B, y_B)$, se pregunta ¿cuáles deben ser las coordenadas del punto C para que el cuadrilátero $AOBC$ sea un paralelogramo?

Solución



5) Conteste cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿Qué signo tienen las coordenadas de cualquier punto situado en el cuadrante II y en el cuadrante IV?
b) ¿Cuál es el valor de la ordenada de cualquier punto situado sobre el eje x?

Solución

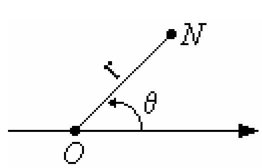
a) El signo de cualquier punto situado en el cuadrante II es $(-,+)$ y en el cuadrante IV es $(+,-)$.

b) Cualquier punto situado sobre el eje x tiene ordenada cero $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

En el plano también se cuenta con otros sistemas de coordenadas que se diferencian de las cartesianas, por ejemplo, las Coordenadas Polares. En donde las coordenadas polares de un punto en el plano se puede definir de la siguiente manera:

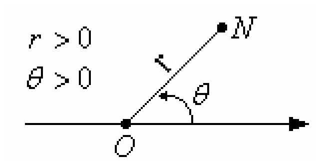
Se traza en el plano un eje numérico horizontal llamado Eje Polar, el origen de coordenadas "O" se llama polo.

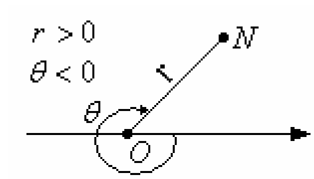
Un punto N cualquiera (diferente del origen o polo) sobre el plano polar queda determinado indicando dos números: "r" (radio polar) que es la distancia del punto N al polo O y θ que es el ángulo polar (es el ángulo de rotación que se mide desde el eje polar hasta el radio polar) y puede medirse en radianes o en grados, se acostumbra escribir como $N(r,\theta)$.



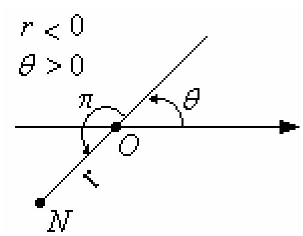
- El origen de coordenadas polares tiene coordenadas $O(0,0)$.

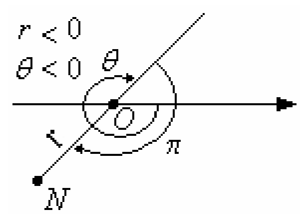
- Un ángulo polar positivo $(\theta > 0)$ se genera en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj  y es negativo $(\theta < 0)$ si es generado en el sentido de estas 





- Cuando el radio polar "r" es negativo $(r < 0)$, el punto N se localiza en sentido contrario a partir del origen, una vez que se ha generado el ángulo θ, esto es: girando $\theta + \pi$ ó $-(\theta + \pi)$.





- En el plano polar no podemos hablar de correspondencia biunívoca entre pares (r, θ) y puntos del plano polar ya que un mismo punto puede quedar representado por múltiples pares (r, θ) si agregamos al ángulo θ un múltiplo entero de 2π, es decir, $(r, \theta + 2n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

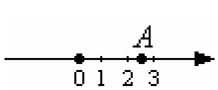
EJEMPLOS

Localice sobre un plano polar los siguientes puntos:

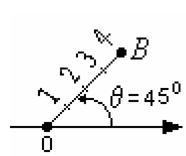
1) $A\left(\frac{5}{2}, 0^0\right)$ **2)** $B\left(4, 45^0\right)$ **3)** $C\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$ **4)** $D\left(-2, \frac{2}{3}\pi\right)$ **5)** $E\left(-3, -60^0\right)$

Solución

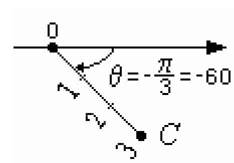
1)



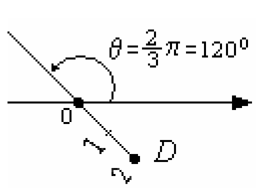
2)

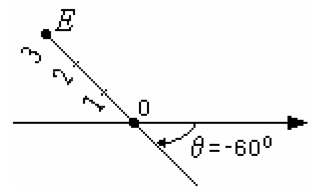


3)



4) **5)**





EJERCICIOS

1) Localizar sobre el plano coordenado cartesiano los siguientes puntos:

$P_1\left(\frac{3}{2},2\right)$, $P_2(4,0)$, $P_3(-1.5,-3)$, $P_4(0,-5)$, $P_5(3,-1)$

2) Conteste cada uno de los siguientes incisos:

a) Si la ordenada de un punto es negativa, ¿en qué cuadrante puede estar situado dicho punto?

b) Un punto cualquiera situado sobre el eje y, ¿cuáles son sus coordenadas en el plano?

c) Sin dibujar, diga en qué cuadrante está situado el punto $(-3,-3)$

3) Halle 3 puntos (cualesquiera) que sean los vértices de un triángulo rectángulo.

4) Dados los puntos $A(-3,4)$ y $B(4,3)$, encuentre las coordenadas del punto $M(x_M, y_M)$ tal que sea el punto medio del segmento AB

5) Conteste cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿Qué signo tienen las coordenadas de cualquier punto situado en los cuadrantes I y III?

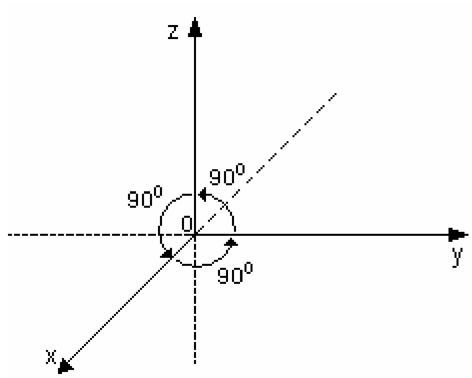
b) ¿Cuál es el valor de la abscisa de cualquier punto situado sobre el eje y?

6) Localice sobre un plano polar los siguientes puntos:

a) $F\left(-\frac{5}{2},0^0\right)$, b) $G(-4,-45^0)$, c) $H\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$, d) $I\left(2,-\frac{2}{3}\pi\right)$, e) $J(3,60^0)$

4.3. COORDENADAS CARTESIANAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

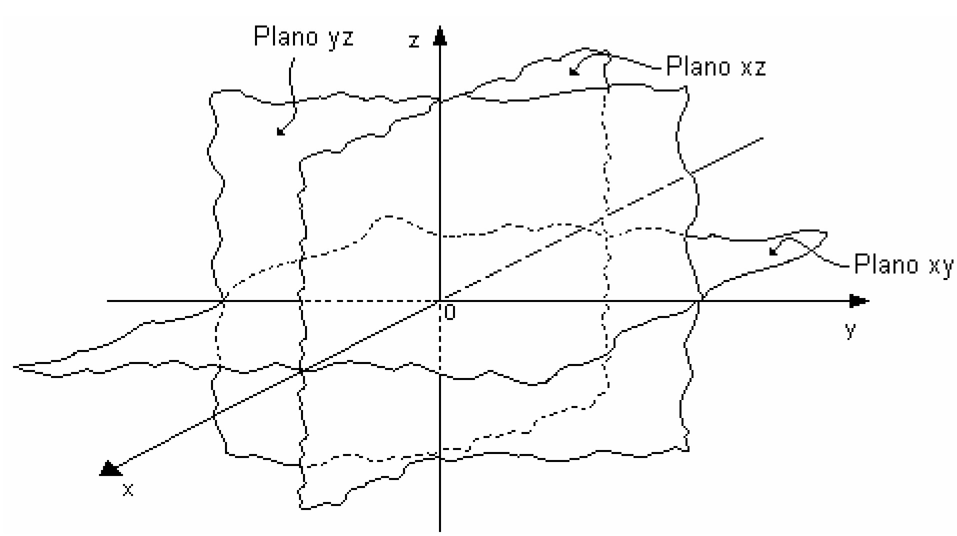
La posición de un punto cualquiera en el espacio de tres dimensiones se puede determinar por medio de coordenadas cartesianas rectangulares si consideramos 3 rectas o ejes numéricos perpendiculares entre si y coincidiendo sus orígenes como se muestra en la siguiente figura:



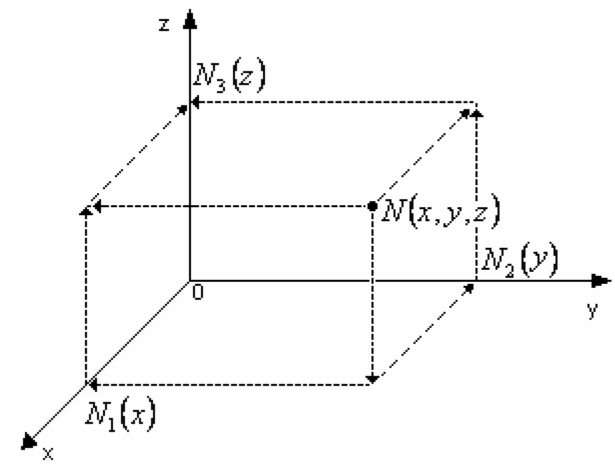
- Cualquier punto que se localice sobre este espacio tridimensional se escribe en forma ordenada (x, y, z) con $x, y, z \in \mathbb{R}$ primero la x (la abscisa), luego la y (la ordenada) y por último la z (la cota).

- El punto $O(0,0)$ es el origen de referencia de los tres ejes coordenados.

- En este espacio tridimensional quedan determinados 3 planos de coordenadas, el plano xy que pasa por los ejes x e y, donde se localizan todos los puntos de la forma $(x, y, 0)$, el plano xz que pasa por los ejes x y z, donde se localizan todos los puntos de la forma $(x, 0, z)$ y por último el plano yz que pasa por los ejes y y z donde se localizan todos los puntos de la forma $(0, y, z)$, quedando así dividido en 8 regiones (octantes), 4 arriba del plano xy y 4 abajo del mismo.



Una forma para obtener las coordenadas de un punto cualquiera $N(x, y, z)$ en el espacio es proceder a encontrar las proyecciones del punto N sobre los ejes coordenados, mediante las perpendiculares bajadas desde el punto N hasta los ejes coordenados: primero bajamos la proyección del punto N al plano xy, mediante paralelas a los ejes x y y obtenemos los puntos N_1 y N_2, con estos puntos y el punto N formamos un paralelepípedo como se muestra en la figura, para obtener el punto N_3, las coordenadas de N_1, N_2 y N_3 son las coordenadas de $N(x, y, z)$.

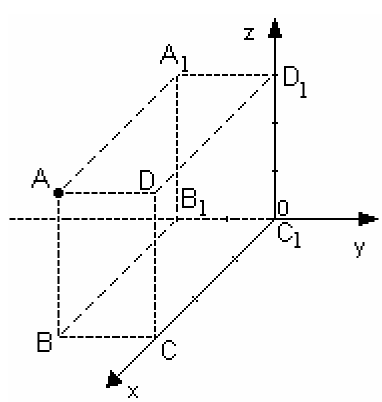


Recíprocamente, cualquier punto de coordenadas (x, y, z) le corresponde un punto del espacio tridimensional y así podemos decir que se ha establecido una correspondencia biunívoca entre puntos del espacio y ternas ordenadas de números reales.

EJEMPLOS

1) Dibujar en el espacio tridimensional la ubicación del punto de coordenadas $A(3,-2,3)$

Solución



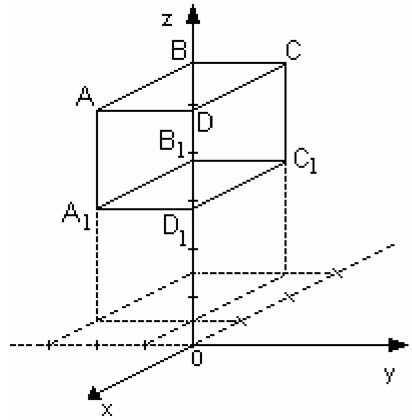
2) Encontrar las coordenadas de todos los vértices del paralelepípedo del ejemplo anterior.

Solución

$A_1(0,-2,3)$, $B_1(0,-2,0)$, $C_1(0,0,0)$, $D_1(0,0,3)$, $B(3,-2,0)$, $C(3,0,0)$, $D(3,0,3)$, $A(3,-2,3)$

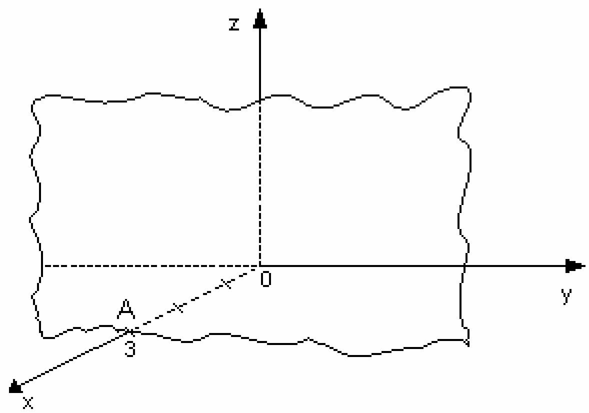
3) Los puntos de coordenadas $A(-1,-3,4)$, $B(-3,-3,4)$, $C(-3,-1,4)$, $D(-1,-1,4)$, $A_1(-1,-3,2)$, $B_1(-3,-3,2)$, $C_1(-3,-1,2)$, $D_1(-1,-1,2)$ son los vértices de un cubo, dibujarlo.

<u>Solución</u>



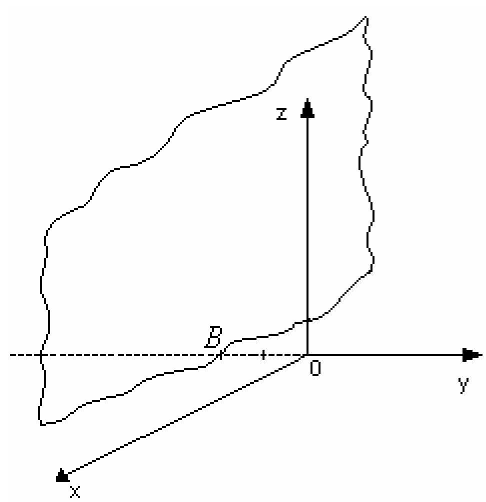
4) Dibujar un plano que pase por el punto $A(3,0,0)$ y que sea paralelo al plano yz.

<u>Solución</u>



5) Dibujar un plano que pase por el punto $B(0,-2,0)$ y sea paralelo al plano xz.

<u>Solución</u>



EJERCICIOS

1) Dibuje en el espacio tridimensional la ubicación del punto de coordenadas $T(2,3,3)$

2) Obtener las coordenadas de todos los vértices del paralelepípedo del ejercicio anterior.

3) Los puntos de coordenadas $A(2,0,2)$, $B(0,0,2)$, $C(0,3,2)$, $D(2,3,2)$, $E(0,4,0)$, $F(2,4,0)$, $A_1(2,0,0)$, $B_1(0,0,0)$ son los vértices de un trapezoide, dibújelo.

4) Dibujar un plano que pase por el punto $P(0,0,3)$ y que sea paralelo al plano xy

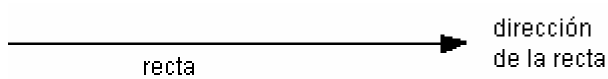
5) Dibujar un plano que pase por los puntos $Q(2,0,0)$, $R(0,3,0)$ y $S(0,0,2)$

4.4. EN LA RECTA: SEGMENTO DIRIGIDO. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE AL SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Hasta ahora, el método de coordenadas en matemáticas nos ha permitido determinar numéricamente la posición de un punto cualquiera sobre una línea recta, en el plano y en el espacio tridimensional, esto nos da la posibilidad de estudiar diversos tipos de problemas geométricos y de figuras en general, representándolos numéricamente y estudiarlos por medio de álgebra.

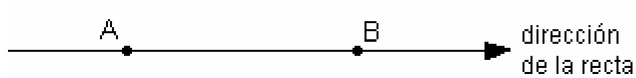
SEGMENTO DIRIGIDO

Toda recta tiene dos direcciones contrarias, cuando se elige una de ellas se le llama recta orientada, cuya dirección queda bien determinada y es costumbre marcarla por medio de una flecha.



Un segmento de recta es una parte de esta, limitada por dos puntos llamados extremos del segmento, llamando a uno de ellos el primero y al otro el segundo y el primero recibe el nombre de origen (o inicial) y el segundo se llama final del segmento. Un segmento de recta cuyos extremos se han ordenado como se ha dicho se llama <u>segmento dirigido</u> y se denotan mediante letras cuyo orden como se ha dicho es muy importante, por ejemplo, el segmento dirigido $\overline{AB}$ indica que el origen es A y el final es B y el segmento dirigido $\overline{BA}$ es diferente del $\overline{AB}$ pues son de sentidos contrarios y de diferente signo.

Geométricamente en un segmento dirigido se deben determinar dos direcciones, la del propio segmento y la de la recta que lo contiene.



La dirección del segmento $\overline{AB}$ es diferente a la dirección del segmento $\overline{BA}$ o sea $\overline{AB} \neq \overline{BA}$

Para obtener la distancia dirigida del segmento $\overline{AB}$, la regla es obtener la diferencia entre el punto final del segmento y el punto inicial, o sea: $\overline{AB} = x_B - x_A$ o $\overline{BA} = x_A - x_B$

EJEMPLOS

Obtener la distancia dirigida $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ en cada inciso:

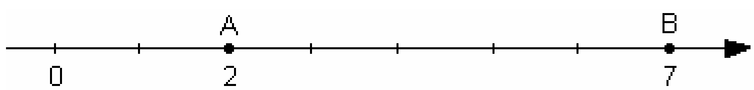
1) $A(2),\ B(7)$ **2)** $A(-3),\ B(5)$

3) $A(-8),\ B(-3)$ **4)** $A(6),\ B(-2)$

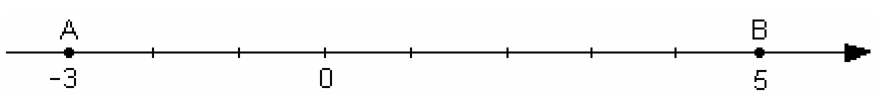
5) $A(-1),\ B(-6)$

<u>Solución</u>

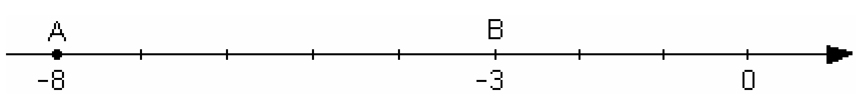
1) $\overline{AB} = x_B - x_A = 7 - 2 = 5$; $\overline{BA} = x_A - x_B = 2 - 7 = -5$



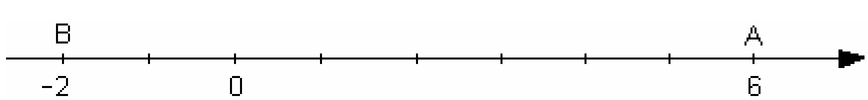
2) $\overline{AB} = x_B - x_A = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$; $\overline{BA} = x_A - x_B = -3 - 5 = -8$



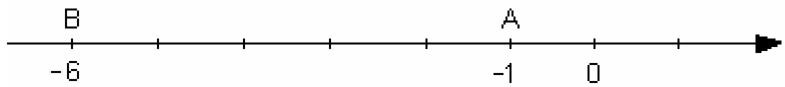
3) $\overline{AB} = x_B - x_A = -3 - (-8) = -3 + 8 = 5$; $\overline{BA} = x_A - x_B = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5$



4) $\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 6 = -8$; $\overline{BA} = x_A - x_B = 6 - (-2) = 6 + 2 = 8$



5) $\overline{AB} = x_B - x_A = -6-(-1) = -6+1 = -5$; $\overline{BA} = x_A - x_B = -1-(-6) = -1+6 = 5$



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

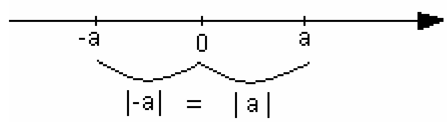
Consideremos dos puntos cualesquiera sobre un eje numérico determinados por sus coordenadas $A(x_A)$ y $B(x_B)$, <u>la distancia</u> entre el punto A y el punto B es la misma que la distancia entre el punto B y el punto A y esta <u>se representa con el valor absoluto de la diferencia de coordenadas de los puntos A y B</u>, esto es:

$$d(AB) = d(BA) = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

<u>**Nota:**</u> No olvidar que el valor absoluto de todo número real es no negativo o sea que si $a \in \mathbb{R}$ entonces: $|a| = a$ si $a \geq 0$

$|a| = -a$ si $a < 0$

y gráficamente significa la distancia desde el punto a hasta el origen de coordenadas, por lo tanto los puntos a y $-a$ están a la misma distancia del origen de coordenadas.



EJEMPLOS

En cada inciso hallar la distancia entre los puntos A y B

1) $A(-5),\ B(-1)$, **2)** $A(-3),\ B(3)$

3) $A(0),\ B(-5)$, **4)** $A(7),\ B(3)$

5) $A(4),\ B(4)$

<u>Solución</u>

1) $d(AB) = |x_B - x_A| = |-1-(-5)| = |-1+5| = |4| = 4$

$d(BA) = |x_A - x_B| = |-5-(-1)| = |-5+1| = |-4| = 4$

se tiene que $d(AB) = d(BA) = 4$

2) $d(AB) = |x_B - x_A| = |3-(-3)| = |3+3| = |6| = 6$

3) $d(AB) = |x_B - x_A| = |-5-(0)| = |-5| = 5$

4) $d(AB) = |x_B - x_A| = |3-7| = |-4| = 4$

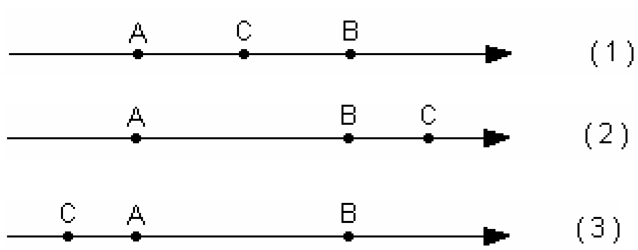
5) $d(AB) = |x_B - x_A| = |4-4| = |0| = 0$

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE AL SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Supongamos tres puntos distintos sobre una recta numérica determinados por sus coordenadas $A(x_A)$, $B(x_B)$ y $C(x_C)$, consideremos el punto $A(x_A)$ el origen de un segmento dirigido, el punto $B(x_B)$ el final del segmento y el punto $C(x_C)$ el punto divisorio.

La razón en la que el punto "C" divide al segmento dirigido $\overline{AB}$ se designa con la letra "r" y se escribe $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$

Las posibilidades de ubicación del punto "C" respecto al segmento $\overline{AB}$ pueden ser las siguientes:



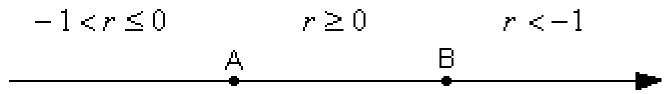
Esto quiere decir que el punto "C" en el caso (1) divide al segmento AB interiormente y en los casos (2) y (3) lo divide exteriormente y en cualquiera de los 3 casos la razón $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ es la misma.

- "r" puede tomar cualquier valor real: $r \in \mathbb{R}$ o $r \in (-\infty, \infty)$.
- El valor "r" será positivo si el punto "C" se localiza dentro del segmento $\overline{AB}$ y será negativo cuando "C" se encuentre fuera del segmento $\overline{AB}$.
- Si el punto "C" coincide con el punto A del segmento dirigido $\overline{AB}$ el valor de $r = 0$ y si coincide con el punto B, el valor de r no está definido (se puede representar con el símbolo $r = \infty$).
- Si el valor de $r = -1$, no existe solución.

El problema de la división de un segmento en una razón "r" tiene una sola y única solución (excepto cuando $r = -1$ como ya se dijo).

A cada valor "r" le corresponde en la recta numérica que contiene al segmento $\overline{AB}$ un cierto punto y recíprocamente, a esto recordemos, se llama una correspondencia biunívoca.

La forma en que se distribuyen los diferentes valores de "r" gráficamente de acuerdo a la posición del punto "C" es:



De acuerdo al sistema de coordenadas, analíticamente se tiene:

$$\text{Si} \qquad r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \qquad \cdots \text{(I)}$$

despejando "x_C" se tiene:

$$r(x_B - x_C) = x_C - x_A$$
$$rx_B - rx_C = x_C - x_A$$
$$rx_B + x_A = x_C + rx_C$$
$$rx_B + x_A = (1 + r)x_C$$
$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1 + r} \qquad \cdots \text{(II)}$$

Aquí tenemos dos fórmulas, la (I) permite determinar "r" a través de x_A, x_B y x_C y la (II) permite determinar "x_C" a través de r, x_A y x_B, dándonos cuenta porqué $r \neq -1$, ya que no podemos dividir entre cero.

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener la coordenada del punto "C" que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón dada.

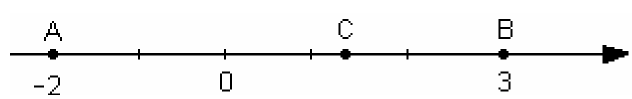
1) $A(-2)$, $B(3)$, $r = 2$

Solución

Analíticamente aplicando la fórmula (II) $\cdots$ $x_C = \dfrac{rx_B + x_A}{1 + r}$

sustituyendo valores: $x_C = \dfrac{(2)(3) + (-2)}{1 + 2} = \dfrac{6 - 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

gráficamente se tiene:



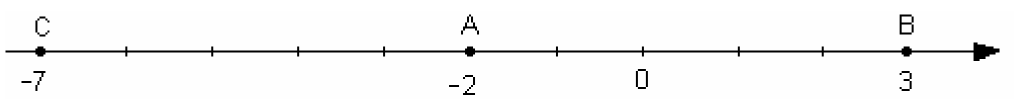
¿Esto qué significa?, observa que la distancia que hay de A a C son $\frac{10}{3}$ y la distancia de C a B son $\frac{5}{3}$, entonces la relación de distancias $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = 2$ que es la razón dada.

2) $A(-2),\ B(3),\ r = -\frac{1}{2}$

Solución

En la misma forma $x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r}$

$$x_C = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(3) + (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = -7$$



Si $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ que es la razón dada.

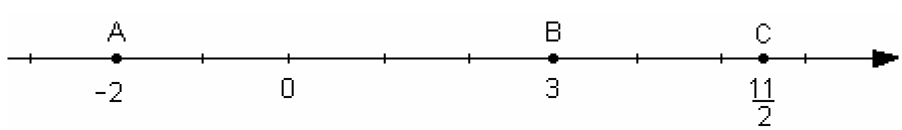
3) $A(-2),\ B(3),\ r = -3$

Solución

$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r}$$

sustituyendo valores:

$$x_C = \frac{(-3)(3) + (-2)}{1 + (-3)} = \frac{-9-2}{1-3} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2} = 5.5$$



Si $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{\dfrac{15}{2}}{-\dfrac{5}{2}} = -3$ que es la razón dada.

En cada inciso obtener la razón en que el punto "C" divide al segmento $\overline{AB}$

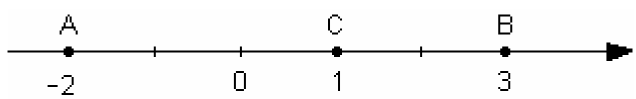
4) $A(-2),\ B(3),\ C(1)$

<u>Solución</u>

Aplicando la fórmula (I) ••• $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$

sustituyendo valores: $r = \dfrac{1-(-2)}{3-1} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

gráficamente:



midiendo distancias:

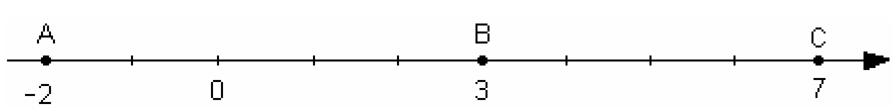
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{3}{2}$ que es la razón calculada.

5) $A(-2),\ B(3),\ C(7)$

<u>Solución</u>

De la misma manera:

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{7-(-2)}{3-7} = \frac{7+2}{-4} = \frac{9}{-4}$$



con distancias:

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{9}{-4} = -\dfrac{9}{4}$ que es la razón calculada.

EJERCICIOS

En cada inciso, obtenga la distancia dirigida $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$

1) $A(4),\ B\left(-\frac{5}{2}\right)$
2) $A(2.5),\ B(8)$
3) $A\left(-\frac{16}{3}\right),\ B(-1)$
4) $A(0),\ B(5)$
5) $A(5),\ B(-2)$

En cada inciso obtenga la distancia entre los puntos T y N.

6) $T(7),\ N(-2)$
7) $T\left(-\frac{3}{4}\right),\ N(3)$
8) $T(-5),\ N(0)$
9) $T(3.5),\ N(8)$
10) $T(-2),\ N(4)$

En cada inciso, obtenga la coordenada del punto "C" que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón dada.

11) $A(3),\ B(-2),\ r=1$
12) $A(2),\ B(7),\ r=-\frac{1}{3}$
13) $A(-5),\ B(2),\ r=-2$

En cada inciso, obtenga la razón en que el punto "C" divide al segmento $\overline{AB}$.

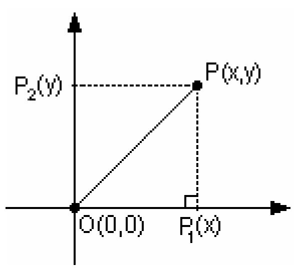
14) $A\left(-\frac{3}{2}\right),\ B(2.5),\ C(4)$
15) $A(-2),\ B(-4),\ C(-5)$

4.5. EN EL PLANO: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DE UN PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Encontrar la distancia entre 2 puntos del plano conocidas sus coordenadas, requiere de un procedimiento algebraico que con solo indicar las operaciones que se deben realizar con los números dados (las coordenadas de los 2 puntos) y el orden en que estas se deben efectuar se pueda obtener el número buscado (la distancia entre los puntos).

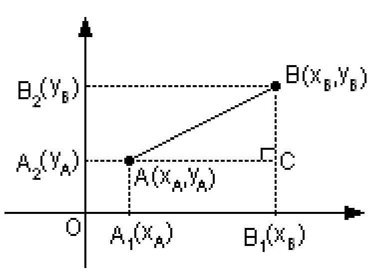
Para mostrar esto, es de gran ayuda recurrir al dibujo del problema empezando por el más sencillo, que es el que uno de los puntos dados sea el origen de coordenadas y el otro punto sea cualquier otro $P(x,y)$.



P_1 y P_2 son las proyecciones del punto P sobre los ejes coordenados. La distancia del origen O a P_1 es "x" ($d(OP_1)=x$) y la distancia de P_1 a P es "y" ($d(P_1P)=y$).
El triángulo OP_1P es rectángulo y por el Teorema de Pitágoras:

$$d(OP)=\sqrt{[d(OP_1)]^2+[d(P_1P)]^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Repitiendo el mismo razonamiento para el caso general, es decir, cuando ninguno de los 2 puntos coincida con el origen de coordenadas se tiene que:



$$d(AB)=\sqrt{[d(AC)]^2+[d(CD)]^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{[d(A_1B_1)]^2+[d(A_2B_2)]^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

o también

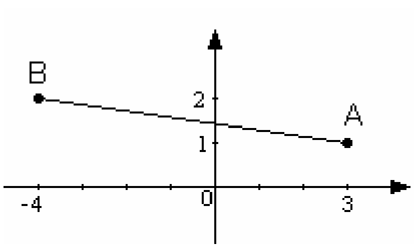
$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Nota: Observar que el orden correcto de las operaciones es muy importante para evitar errores. Si los puntos A y B quedan ubicados en cualquier lugar del plano de coordenadas, la fórmula no cambia.

EJEMPLOS

1) Obtener la distancia entre los puntos $A(3,1)$ y $B(-4,2)$

Solución



$$d(AB)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{[3-(-4)]^2+(1-2)^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{(7)^2+(-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}\approx 7.07$$

o en el otro orden:

$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4-3)^2+(2-1)^2}$$

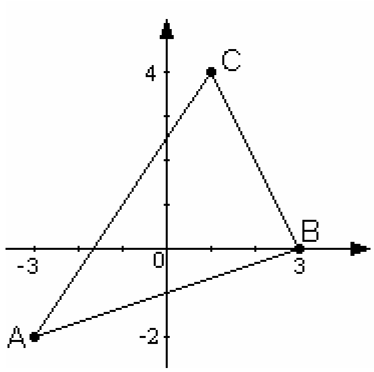
$$d(AB)=\sqrt{(-7)^2+(1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}\approx 7.07$$

Este resultado quiere decir que de acuerdo a la unidad de medida elegida, la distancia del punto A al punto B es de 7.07 unidades aproximadamente.

2) Los puntos $A(-3,-2)$, $B(3,0)$ y $C(1,4)$ son los vértices de un triángulo, obtener su perímetro.

Solución

Sabemos que el perímetro de un triángulo es igual a la suma de las longitudes de sus lados: $P=d(AB)+d(BC)+d(AC)$.



$$d(AB)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(-2-0)^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$d(BC)=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(0-4)^2}$$

$$d(BC)=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

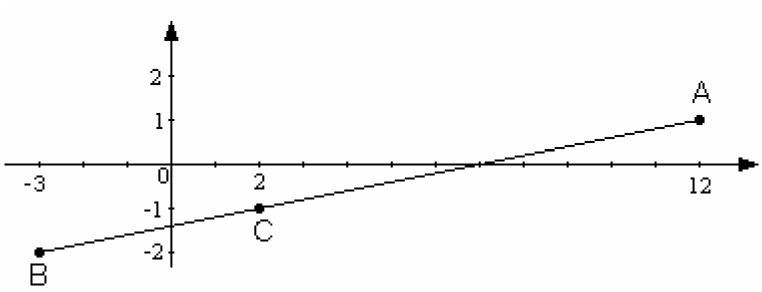
$$d(AC)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{[1-(-3)]^2+[4-(-2)]^2}$$

$$d(AC)=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

$$P=2\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{13}\approx 18.01$$

3) Si los puntos $A(12,1)$, $B(-3,-2)$ y $C(2,-1)$ se ubican sobre una misma linea recta, demostrarlo.

Solución



Con ayuda de la figura del problema, bastaría comprobar que la distancia de B a C más la distancia de C a A es igual a la distancia de B a A, o sea:

$$d(BC)+d(CA)=d(BA)$$

$$\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}+\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

$$\sqrt{[2-(-3)]^2+[-1-(-2)]^2}+\sqrt{(12-2)^2+[1-(-1)]^2}=\sqrt{[12-(-3)]^2+[1-(-2)]^2}$$

$$\sqrt{25+1}+\sqrt{100+4}=\sqrt{225+9}$$

$$\sqrt{26}+\sqrt{104}=\sqrt{234}$$

$$\sqrt{26}+2\sqrt{26}=3\sqrt{26}$$

$$3\sqrt{26}=3\sqrt{26}$$

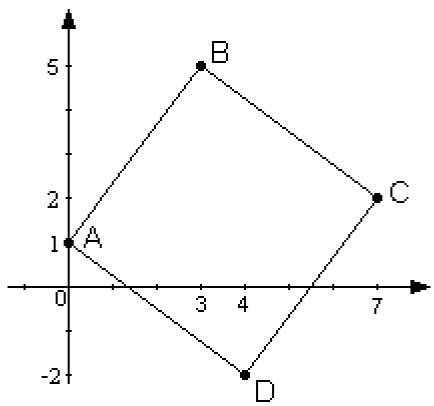
Por lo tanto A, B y C sí están alineados o lo que es lo mismo, son colineales.

4) Verificar que los puntos $A(0,1)$, $B(3,5)$, $C(7,2)$ y $D(4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.

Solución

Es importante señalar que si intentamos resolver un problema geométrico de esta naturaleza donde se piden ciertas magnitudes, midiéndolas con una regla directamente sobre el dibujo del problema lo más seguro es que se obtienen errores, por esto, se recurre al análisis (álgebra) que si nos proporciona resultados que se pueden considerar exactos, auxiliándonos con la figura para definir criterios de solución.

En este caso basta comprobar que las distancias $d(AB)=d(DC)=d(BC)$, pues la distancia $d(AD)$ estaría obligada por contrucción a ser igual que las otras 3.



$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(5-1)^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$d(DC)=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=\sqrt{(7-4)^2+[2-(-2)]^2}$$

$$d(DC)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

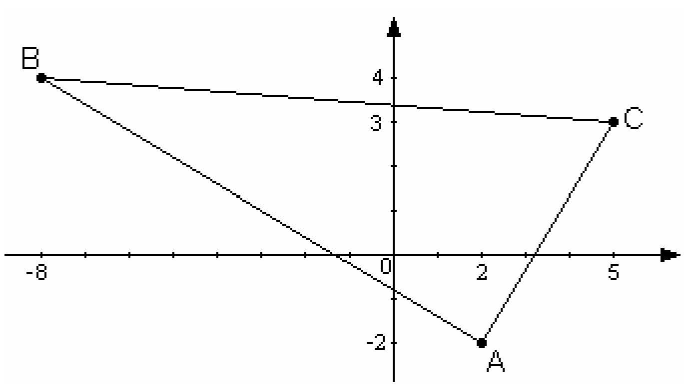
$$d(BC)=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2}$$

$$d(BC)=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Por lo tanto sí es un cuadrado.

5) Verificar que los puntos $A(2,-2)$, $B(-8,4)$ y $C(5,3)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

Solución



Apoyándonos con la figura observamos que bastaría comprobar con el Teorema de Pitágoras que:

$$[d(AB)]^2+[d(AC)]^2=[d(BC)]^2$$

$$[d(AB)]^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(-8-2)^2+[4-(-2)]^2=100+36=136$$

$$[d(AC)]^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2=(5-2)^2+[3-(-2)]^2=9+25=34$$

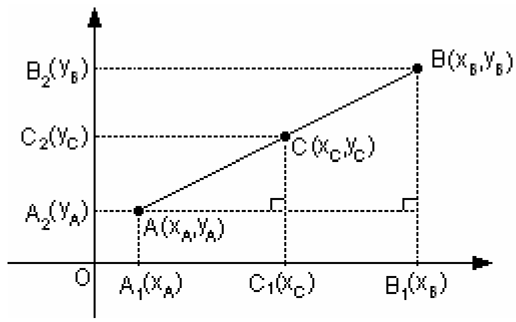
$$[d(AB)]^2+[d(AC)]^2=136+34=170$$

$$[d(BC)]^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2=[5-(-8)]^2+(3-4)^2=169+1=170$$

luego entonces sí es un triángulo rectángulo y su ángulo recto (90^0) se localiza en el vértice A.

COORDENADAS DE UN PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

Consideremos el segmento dirigido $\overline{AB}$ y un punto C perteneciente al mismo segmento, las proyecciones de estos 3 puntos sobre los ejes coordenados son A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2. Para obtener las coordenadas del punto $C(x_C, y_C)$ que divida al segmento $\overline{AB}$ según la razón "r", el procedimiento es una extensión del problema de la sección 4.4 anterior con exactamente las mismas consideraciones con las proyecciones de los tres puntos A, B y C sobre los ejes coordenados, como se muestra a continuación ayudándonos con la siguiente figura:



$$r = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$$

$$r = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$$

despejando x_C y y_C de ambos respectivamente se tiene que:

$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r} \quad \text{y} \quad y_C = \frac{ry_B + y_A}{1+r}$$

Que son las coordenadas del punto $C(x_C, y_C)$ que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón "r".

- Cuando la razón $r = 1$ el problema se convierte en el caso particular de que el punto "C" es el <u>PUNTO MEDIO</u> del segmento $\overline{AB}$ como sigue:

$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r} = \frac{(1)x_B + x_A}{1+1} = \frac{x_B + x_A}{2}$$

$$y_C = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{(1)y_B + y_A}{1+1} = \frac{y_B + y_A}{2}$$

Por lo tanto, en general las coordenadas del punto medio M de un segmento dirigido $\overline{AB}$ cuyos extremos son $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ son $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

EJEMPLOS

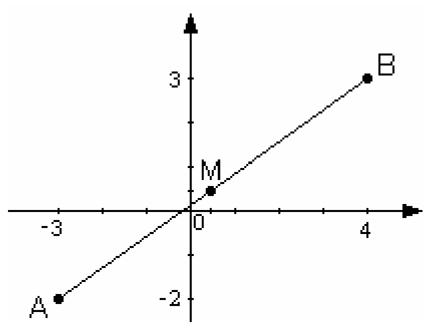
1) Obtener las coordenadas del punto $M(x_M, y_M)$ que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón $r=1$, cuyos extremos son $A(-3,-2)$ y $B(4,3)$.

Solución

$$x_M = \frac{rx_B + x_A}{1+r} = \frac{(1)(4)+(-3)}{1+1} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{(1)(3)+(-2)}{1+1} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$



o también:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

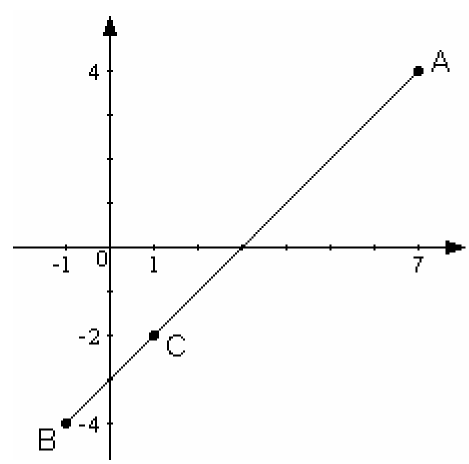
2) $A(7,4)$ y $B(-1,-4)$ son los extremos del segmento $\overline{AB}$, hallar la razón "r" en que el punto $C(1,-2)$ divide al segmento $\overline{AB}$.

Solución

Si $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$, $r = \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$

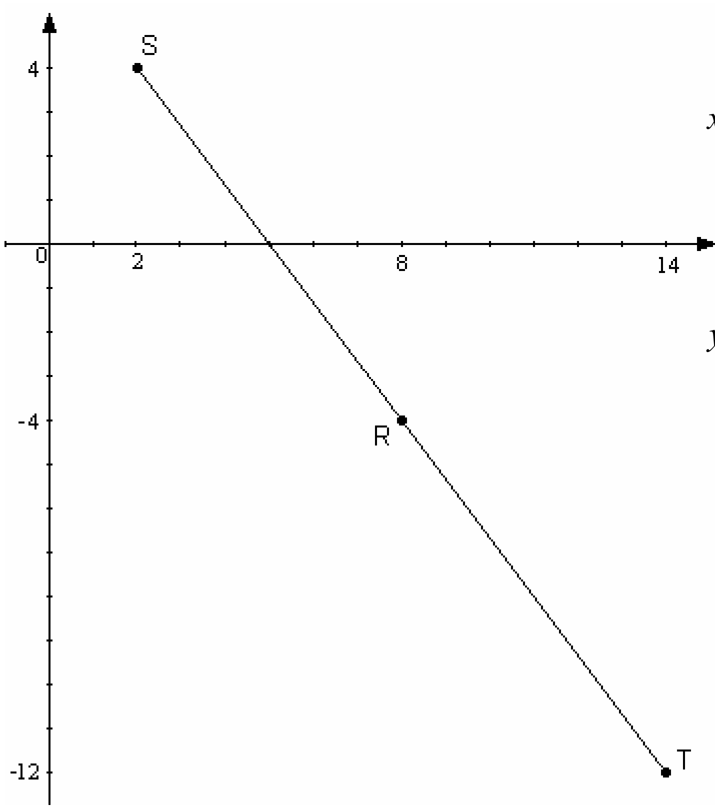
$$r = \frac{1-7}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3 \ , \quad r = \frac{-2-4}{-4-(-2)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

La razón es $r=3$. No olvidar que este resultado indica que la magnitud de A a C es 3 veces la de C a B, o sea $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{3}{1}$



3) Los extremos de un segmento $\overline{RS}$ son $R(8,-4)$ y $S(2,4)$. Hallar el punto $T(x_T, y_T)$ que divide al segmento según la razón $r=-\frac{1}{2}$.

<u>Solución</u>



$$x_T=\frac{rx_S+x_R}{1+r}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2)+8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{7}{\frac{1}{2}}=14$$

$$y_T=\frac{ry_S+y_R}{1+r}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(4)+(-4)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{-6}{\frac{1}{2}}=-12$$

$$T(14,-12)$$

La magnitud de T a S es dos veces la de R a T en sentidos contrarios por el signo negativo.

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{TS}}=-\frac{1}{2}$$

4) Con los mismos datos del problema anterior. Hallar las coordenadas del punto $V(x_V, y_V)$ que divide al segmento $\overline{RS}$ según la razón $r=-2$.

<u>Solución</u>

La respuesta podemos obtenerla aplicando las fórmulas: $x_V=\frac{rx_S+x_R}{1+r}$, $y_V=\frac{ry_S+y_R}{1+r}$

o aplicando directamente la razón $r=\frac{\overline{RV}}{\overline{VS}}=\frac{x_V-x_R}{x_S-x_V}$ y $r=\frac{y_V-y_R}{y_S-y_V}$ y despejando x_V y y_V

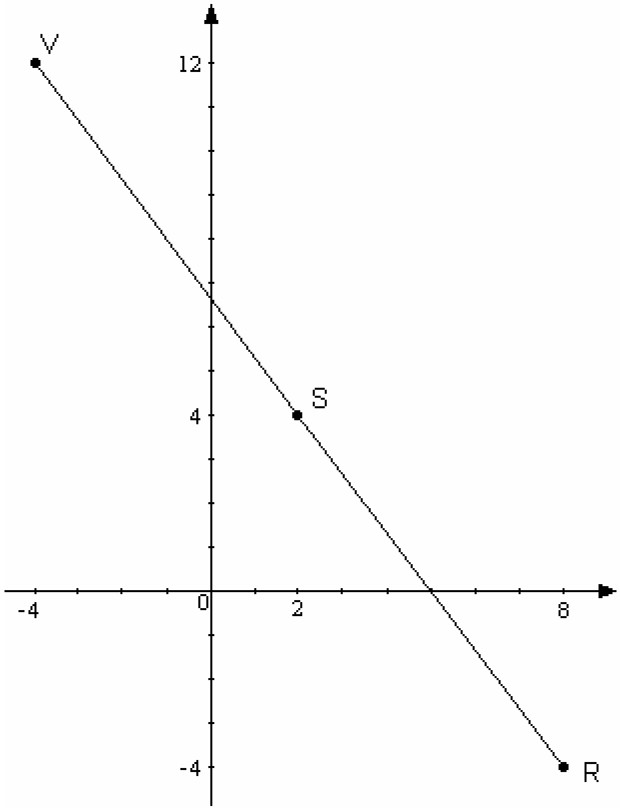
o sea:

$$\left.\begin{aligned} x_V&=\frac{rx_S+x_R}{1+r}=\frac{(-2)(2)+8}{1-2}=\frac{-4+8}{-1}=\frac{4}{-1}=-4\\ y_V&=\frac{ry_S+y_R}{1+r}=\frac{(-2)(4)+(-4)}{1-2}=\frac{-8-4}{-1}=\frac{-12}{-1}=12\end{aligned}\right\} V(-4,12)$$

o con la razón:

$r = \dfrac{x_V - x_R}{x_S - x_V}$; $-2 = \dfrac{x_V - 8}{2 - x_V}$; despejando $x_V = -4$;

$r = \dfrac{y_V - y_R}{y_S - y_V}$; $-2 = \dfrac{y_V - (-4)}{4 - y_V}$; despejando $y_V = 12$



La magnitud de R a V es dos veces la de V a S en sentidos contrarios por eso es negativa.

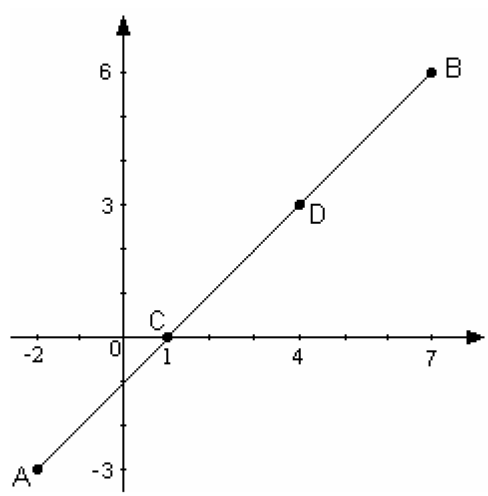
$$\frac{\overline{RV}}{\overline{VS}} = -\frac{2}{1} = -2$$

5) Obtener las coordenadas de dos puntos $C(x_C, y_C)$ y $D(x_D, y_D)$ que dividen internamente al segmento $\overline{AB}$ en 3 segmentos de igual magnitud, siendo $A(-2,-3)$ y $B(7,6)$.

<u>Solución</u>

Si $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{1}{2}$, $x_C = \dfrac{rx_B + x_A}{1 + r} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)(7) + (-2)}{1 + \frac{1}{2}}$

$$x_C = \frac{\frac{7}{2} - \frac{4}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$



$$y_C = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(6)+(-3)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3-3}{\frac{3}{2}} = 0$$

$$C(1,0)$$

Si $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = 2$; $x_D = \frac{rx_B + x_A}{1+r} = \frac{(2)(7)+(-2)}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$

$$y_D = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{(2)(6)+(-3)}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$D(4,3)$$

Por lo tanto $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$

EJERCICIOS

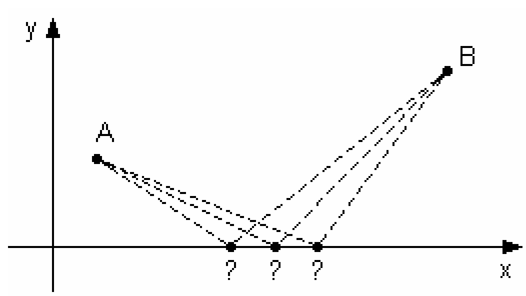
1) Obtenga la distancia entre los puntos $A(-3,5)$ y $B(0,0)$.

2) Los puntos $A(-4,-3)$, $B(-2,3)$, $C(1,4)$ y $D(4,-2)$, son los vértices de un cuadrilátero, obtenga la magnitud de sus diagonales.

3) Demostrar que los puntos $A(-2,-1), B(2,2)$ y $C(5,-2)$ son los vértices de un triángulo isóceles.

4) Los cuatro puntos $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(11,6)$ y $D(9,2)$ son los vértices de un paralelogramo, demuéstrelo.

5) ¿Cuál es la distancia más corta desde A a B, si antes de llegar a B hay que tocar en algún punto al eje x?



6) Obtenga las coordenadas de un punto $W(x_W, y_W)$ que divide al segmento $\overline{LM}$ según la razón $r = \frac{3}{5}$, siendo $L(-4,-2)$ y $M(5,-1)$.

7) Hallar la razón "r" en que el punto $P_1(0,4)$ divide al segmento $\overline{QR}$, donde $Q(3,6)$ y $R(-6,0)$.

8) Los extremos de un segmento $\overline{AB}$ son $A(-1,4)$, $B(3,-2)$. Hallar las coordenadas del punto $G(x_G, y_G)$ que divide al segmento en la razón $r = -\frac{1}{3}$.

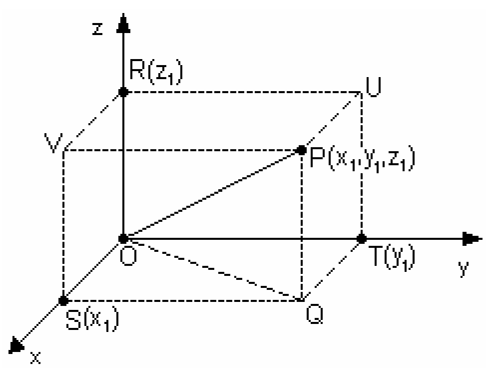
9) Obtener las coordenadas del punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento $\overline{CD}$ siendo $C(-3,4)$ y $D(5,-2)$.

10) Obtenga las coordenadas de tres puntos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$ que dividen internamente al segmento $P_1(-2,3)$ y $P_2(6,-1)$ en 4 partes iguales.

4.6. EN EL ESPACIO: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

- Iniciemos por el caso más sencillo, el de la distancia entre cualquier punto en el espacio tridimensional $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y el origen de coordenadas $O(0,0)$, ayudándonos de la siguiente figura:



Por el Teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo OQT se tiene que:

$$(OQ)^2 = (QT)^2 + (OT)^2$$

$$(OQ)^2 = x_1^2 + y_1^2$$

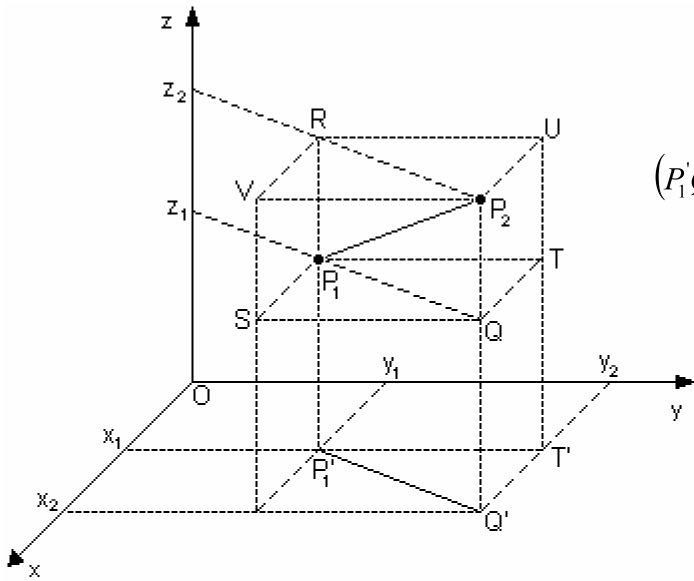
En el triángulo rectángulo OQP se tiene:

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (QP)^2$$

$$(OP)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Por lo tanto, la distancia entre los puntos O y P es: $d(OP) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ...(I)

- En el caso más general, cuando los dos puntos son diferentes y ninguno coincide con el origen de coordenadas, sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ como se muestra en la siguiente figura:



Observemos que los triángulos rectángulos $P_1QT = P_1'Q'T'$ y por el Teorema de Pitágoras:

$$\left(P_1'Q'\right)^2 = \left(Q'T'\right)^2 + \left(T'P_1'\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

En el triángulo rectángulo P_1P_2Q:

$$\left(P_1P_2\right)^2 = \left(P_1Q\right)^2 + \left(QP_2\right)^2$$

como $\left(P_1Q\right)^2 = \left(P_1'Q'\right)^2$

$$\left(P_1P_2\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2$$

La distancia entre P_1 y P_2 es: $d\left(P_1P_2\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$ $\cdots$(II)

Muchos de los resultados de la Geometría Analítica plana (dos dimensiones) se generalizan a la geometría del espacio tridimensional como en el caso de la sección 4.5 anterior y el presente 4.6.

EJEMPLOS

En cada inciso, encuentre la distancia entre los dos puntos que se dan.

1) $O(0,0,0)$, $P_1(-3,2,1)$

Solución

$$d\left(OP_1\right) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

2) $P_1(-1,-2,-3)$, $P_2(2,3,-1)$

Solución

$$d\left(P_1P_2\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38} \approx 6.16$$

3) $P_1(2,0,3)$, $P_2(1,1,1)$

Solución

$$d\left(P_1P_2\right) = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \approx 2.45$$

4) Los puntos $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ y $C(-3,2,1)$ son los vértices de un triángulo ¿qué tipo de triángulo es?

Solución

$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(-4+1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{9+9+0}=\sqrt{18}$$

$$d(BC)=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(2+4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+36+1}=\sqrt{46}$$

$$d(AC)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(2+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{36+9+1}=\sqrt{46}$$

Como la magnitud de los lados BC y AC son iguales, se trata de un triángulo isósceles.

5) Encontrar sobre el eje x un punto cuya distancia al punto $A(-3,8,4)$ sea igual a 12.

Solución

Si el punto que se busca está sobre el eje x, sus coordenadas deben ser de la forma $P(x,0,0)$, entonces la distancia de A a P debe ser 12 unidades:

$$d(AP)=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2+(z_A-z_P)^2}=12$$

$$d(AP)=\sqrt{(-3-x)^2+(8-0)^2+(4-0)^2}=12$$

$$d(AP)=(-3-x)^2+(8-0)^2+(4-0)^2=144$$

$$d(AP)=9+6x+x^2+64+16=144$$

$$x^2+6x-55=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(1)(-55)}}{2(1)}=\frac{-6\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{-6\pm16}{2}$$

$$x_1=5 \quad , \quad x_2=-11$$

La solución son dos puntos sobre el eje x que cumplen con la condición pedida: $P_1(5,0,0)$ y $P_2(-11,0,0)$.

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO SEGUN UNA RAZÓN DADA

Utilizando la misma figura anterior con la que obtuvimos la distancia entre dos puntos del espacio tridimensional, también podemos generalizar el problema de la sección 4.5 si consideramos dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ que son los extremos del segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$ y un tercer punto $P(x, y, z)$ que divide al segmento según la razón "r" o sea $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ donde $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, $r = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$, $r = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z}$ o despejando respectivamente a x, y y z:

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} \quad ; \quad y = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \quad ; \quad x = \frac{rz_2 + z_1}{1 + r}$$

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener las coordenadas del punto $P(x, y, z)$ que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón dada.

1) $A(4,-2,3)$, $B(-2,3,-1)$; $r = \dfrac{3}{2}$

<u>Solución</u>

Si $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{x - 4}{-2 - x} = \dfrac{3}{2}$; $2x - 8 = -6 - 3x$; $5x = 2$; $x = \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{y + 2}{3 - y} = \dfrac{3}{2}$; $2y + 4 = 9 - 3y$; $5y = 5$; $y = 1$

$\dfrac{z_P - z_A}{z_B - z_P} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{z - 3}{-1 - z} = \dfrac{3}{2}$; $2z - 6 = -3 - 3z$; $5z = 3$; $z = \dfrac{3}{5}$

Las coordenadas del punto son $P\left(\dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{3}{5}\right)$

2) $A(1,-1,1)$, $B(2,-3,2)$; $r = -\dfrac{1}{3}$

<u>Solución</u>

Si $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = -\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{x - 1}{2 - x} = -\dfrac{1}{3}$; $3x - 3 = -2 + x$; $2x = 1$; $x = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = -\frac{1}{3} \;;\; \frac{y+1}{-3-y} = -\frac{1}{3} \;;\; 3y+3 = 3+y \;;\; 2y = 0 \;;\; y = 0$$

$$\frac{z_P - z_A}{z_B - z_P} = -\frac{1}{3} \;;\; \frac{z-1}{2-z} = -\frac{1}{3} \;;\; 3z-3 = -2+z \;;\; 2z = 1 \;;\; z = \frac{1}{2}$$

Las coordenadas del punto son $P\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

3) $A(-4,8,6)$, $B(6,-4,-2)$; $r = -2$

Solución

Si $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -2 \;;\; \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = -2 \;;\; \frac{x+4}{6-x} = -2 \;;\; x+4 = -12+2x \;;\; 4+12 = 2x-x \;;\; x = 16$

$$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = -2 \;;\; \frac{y-8}{-4-y} = -2 \;;\; y-8 = 8+2y \;;\; -8-8 = 2y-y \;;\; y = -16$$

$$\frac{z_P - z_A}{z_B - z_P} = -2 \;;\; \frac{z-6}{-2-z} = -2 \;;\; z-6 = 4+2z \;;\; -6-4 = 2z-z \;;\; z = -10$$

Las coordenadas del punto son $P(16,-16,-10)$

4) Los vértices de un triángulo son $A(3,2,5)$, $B(1,-4,-3)$ y $C(-3,0,-1)$, obtener las coordenadas de los puntos medios de cada lado.

Solución

Punto medio del lado AB:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \;;\; \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \;;\; \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$M_{AB}(2,-1,1)$$

Punto medio del lado BC:

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \;;\; \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+0}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \;;\; \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$M_{BC}(-1,-2,-2)$$

Punto medio del lado AC:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3-3}{2} = 0 \;\; ; \;\; \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \;\; ; \;\; \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \;\; ; \;\; M_{AC}(0,1,2)$$

5) Obtener las coordenadas de los extremos de un segmento $\overline{AB}$ que es dividido en tres partes iguales por los puntos $P(2,0,2)$ y $Q(5,-2,0)$.

Solución

Como los puntos P y Q son internos, podemos considerar las razones $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = 1$ y $\frac{\overline{QP}}{\overline{PB}} = 1$,

con la razón $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = 1$, se tiene $\frac{x_Q - x_A}{x_P - x_Q} = 1$; $\frac{5 - x_A}{2-5} = 1$; $5 - x_A = -3$; $x_A = 8$

$$\frac{y_Q - y_A}{y_P - y_Q} = 1 \;;\; \frac{-2 - y_A}{0+2} = 1 \;;\; -2 - y_A = 2 \;;\; y_A = -4$$

$$\frac{z_Q - z_A}{z_P - z_Q} = 1 \;;\; \frac{0 - z_A}{2-0} = 1 \;;\; -z_A = 2 \;;\; z_A = -2$$

Las coordenadas del punto A son: $A(8,-4,-2)$, con la razón $\frac{\overline{QP}}{\overline{PB}} = 1$, se tiene:

$$\frac{x_P - x_Q}{x_B - x_P} = 1 \;;\; \frac{2-5}{x_B - 2} = 1 \;;\; -3 = x_B - 2 \;;\; x_B = -1 \quad ; \quad \frac{y_P - y_Q}{y_B - y_P} = 1 \;;\; \frac{0+2}{y_B - 0} = 1 \;;\; 2 = y_B \;;\; y_B = 2$$

$$\frac{z_P - z_Q}{z_B - z_P} = 1 \;;\; \frac{2-0}{z_B - 2} = 1 \;;\; 2 = z_B - 2 \;;\; z_B = 4$$

Las coordenadas del punto B son: $B(-1,2,4)$

EJERCICIOS

1) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0,0,0)$ a los puntos $P_1(-2,4,-4)$, $P_2(-5,10,3)$, $P_3(11,-4,3)$.

2) Obtener sobre el eje de las ordenadas un punto $P(x,y,z)$ que equidiste de los puntos $P_1(7,-3,1)$ y $P_2(-5,7,5)$.

3) Los puntos $A(-1,2,4)$, $B(2,-6,3)$ y $C(0,5,2)$ son los vértices de un triángulo, calcular la longitud de cada lado.

4) Dados los vértices de un triángulo $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ y $C(1,2-3)$ ¿qué tipo de triángulo es?

5) El centro de gravedad de una varilla de acero homogénea está en el punto $G(-1,1,5)$ y uno de sus extremos está en el punto $B(-1,-2,7)$, ¿cuáles son las coordenadas del otro extremo $A(x_A, y_A, z_A)$?

En cada inciso obtener las coordenadas del punto $P(x,y,z)$ que divide al segmento P_1P_2 según la razón dada:

6) $P_1(1,-2,-3)$, $P_2(-1,1,10)$; $r=-1$

7) $P_1(4,-2,-4)$, $P_2(-4,12,6)$; $r=1$

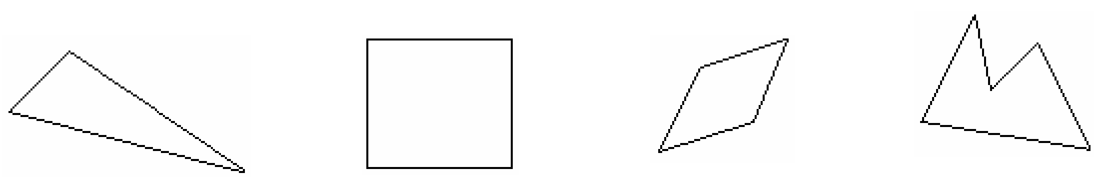
8) $P_1(10,-4,3)$, $P_2(10,15,16)$; $r=3$

9) $P_1(1,-3,8)$, $P_2(4,-1,1)$; $r=-\frac{1}{4}$

10) $P_1(3,-2,5)$, $P_2(-2,1,-3)$; $r=-3$

4.7. CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS POR SUS LADOS Y POR SUS ÁNGULOS

POLIGONO se llama polígono a una porción de un plano limitada por segmentos de recta.

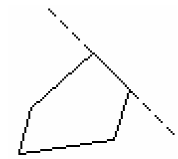


- Cada segmento de recta de un polígono se llama LADO.
- La abertura formada por 2 lados que parten de un mismo punto se llama ÁNGULO.
- El punto en el que concurren 2 lados de un ángulo se llama VÉRTICE.

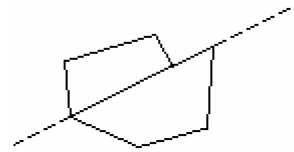
Podemos clasificar a los polígonos como sigue:

Por el Número de Lados { triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), heptágonos (7 lados), octágonos (8 lados), eneágonos (9 lados), decágonos (10 lados), endecágonos (11 lados), dodecágonos (12 lados), pentedecágonos (15 lados), icoságonos (20 lados), etc.

CONVEXOS: Si por cada uno de sus lados se traza una recta y prolongándola el polígono queda ubicado del mismo lado de la recta.



CONCAVOS: Si por alguno de sus lados se traza una recta y prolongándola el polígono queda ubicado en ambos lados de la recta.



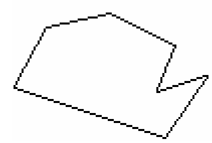
EQUILÁTEROS: Todos sus lados son de igual magnitud.

EQUIÁNGULOS: Todos sus ángulos son iguales.

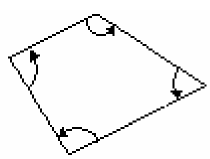
REGULARES: Son EQUILÁTEROS y EQUIÁNGULOS son ejemplos los triángulos equiláteros, los cuadrados, los pentágonos, los octágonos, etc.

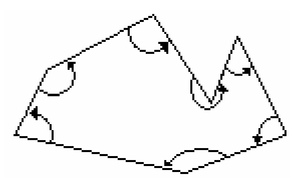
IRREGULARES

- CONVEXOS: Sus lados no todos son iguales, por ejemplo: triángulos isósceles y escalenos, rectángulos, paralelogramos, trapecios, etc.
- CÓNCAVOS: Como el siguiente:

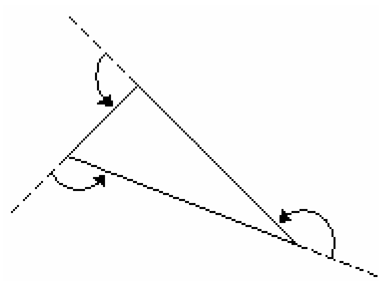


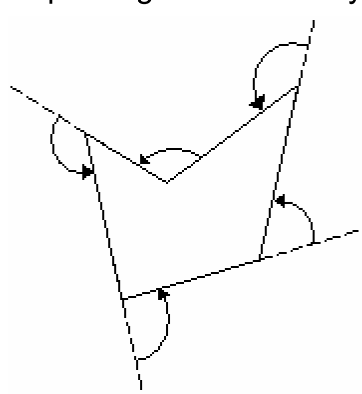
- Ángulo interior de un polígono se forma por 2 lados consecutivos.





- Ángulo exterior de un polígono se puede formar prolongando un lado y trazarlo con el lado consecutivo:





- El número de lados de un polígono es igual al número de vértices o también igual al número de ángulos interiores.

- La suma de los ángulos interiores (Sai) de un polígono cualquiera se obtiene con la expresión: $Sai = 180^0(n-2)$; $n =$ número de lados.

- La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es de 360^0.

- Los ángulos interiores de un polígono regular son iguales y sus ángulos exteriores también son iguales.

- Diagonal en un polígono convexo es un segmento de recta que une 2 vértices no consecutivos.

Los triángulos son una clase muy importante de polígonos y que podemos clasificar como sigue:

POR SUS LADOS Y ÁNGULOS

- Equiláteros (del latín significa "lados iguales"): tienen sus 3 lados iguales y sus 3 ángulos iguales.
- Isósceles (del griego significa "piernas iguales"): tienen 2 lados iguales y otro diferente y sus ángulos, 2 son iguales y el otro no.
- Escaleno (del griego significa "disparejo"): tienen sus 3 lados diferentes y sus ángulos también.

UNICAMENTE POR SUS ÁNGULOS

- Rectángulo: Uno de sus ángulos es recto (90^0)
- Oblicuángulo: Ninguno de sus ángulos es recto
- Acutángulo: Sus 3 ángulos son agudos (menores de 90^0)
- Obtusángulo: Uno de sus ángulos es mayor de 90^0

Otro tipo de polígono que también son una clase muy importante son los cuadriláteros, los podemos clasificar de acuerdo al paralelismo e igualdad de sus lados y ángulos opuestos como sigue:

CUADRILÁTEROS

- Escaleno: Sus 4 lados no son paralelos ni son iguales.
- Cometa: Dos pares de lados adyacentes son iguales.
- Trapezoide: Un par de lados opuestos son paralelos.
- Trapecio: (o trapezoide isósceles) sus lados no paralelos son iguales.
- Paralelogramo: Ambos pares de lados opuestos son paralelos.
- Rombo: Un paralelogramo con sus 4 lados iguales.
- Rectángulo: Un paralelogramo con sus 4 ángulos iguales.
- Cuadrado: Un rectángulo con sus 4 lados iguales.

EJEMPLOS

En cada inciso obtener la suma de los ángulos internos de cada polígono:

1) Triángulo

Solución

Los triángulos tienen 3 lados por lo que $Sai = 180^0(3-2) = 180^0$

2) Decágono

Solución

El decágono tiene 10 lados, entonces la $Sai = 180^0(10-2) = 1440^0$

3) Icoságono

Solución

Un icoságono tiene 20 lados, por lo tanto: $Sai = 180^0(20-2) = 3240^0$

4) Demuestre que la suma de los ángulos externos de un pentágono regular es de 360^0.

Solución

Un pentágono tiene 5 lados y 5 vértices, la suma de sus ángulos internos es: $Sai = 180^0(5-2) = 540^0$.

Cada vértice mide: $\frac{540^0}{5} = 108^0$.

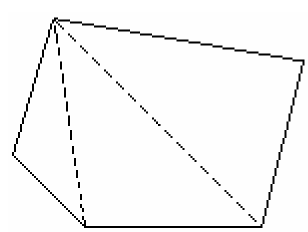
Cada ángulo externo mide: $180^0 - 108^0 = 72^0$

La suma de los ángulos externos es: $(72^0)(5) = 360^0$

5) Trace las diagonales desde cualquiera de los vértices de un polígono convexo de 5 lados y compruebe que se cumple la fórmula $N_d = n-3$; $n =$ número de lados.

Solución

Sea el siguiente polígono:



$N_d = 5-3 = 2$

Solo 2 diagonales

EJERCICIOS

1) ¿Qué clase de polígono es el que la suma de sus ángulos interiores es de 2340^0?

2) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un octágono regular?

3) ¿Qué tipo de polígono regular es el que cada uno de sus ángulos internos mide 156^0?

4) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos externos de un dodecágono regular?

5) Si el ángulo interno de un polígono regular mide 156^0, ¿cuánto mide su ángulo externo?

4.8. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

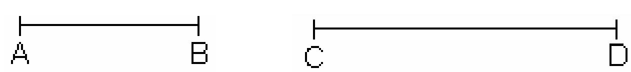
CONGRUENCIA. Dos objetos cualesquiera que son réplica exacta uno del otro, se dice que son congruentes.

- En geometría, dos figuras planas son congruentes si al ponerse juntas una con la otra coinciden exactamente en forma y tamaño (es decir, son iguales).

SEMEJANZA. Objetos que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño, son semejantes.

- En geometría, todas las figuras que son congruentes, también son semejantes.

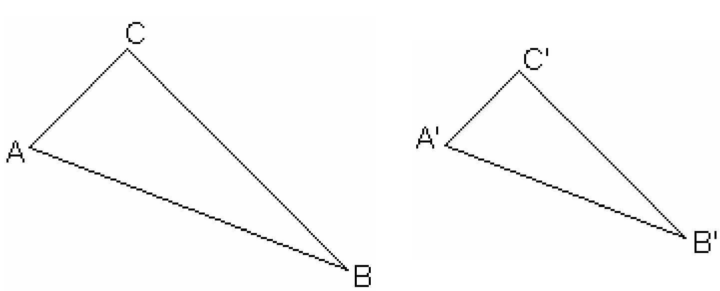
- Todos los segmentos rectilíneos son semejantes entre si (tienen la misma forma).



La razón de semejanza es: $\dfrac{CD}{AB}$

– Definición:

Dos triángulos son semejantes, si sus ángulos correspondientes son congruentes (iguales) y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

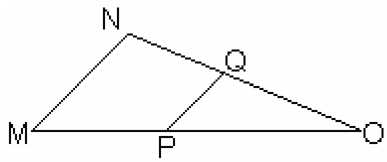


$\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$ se lee “el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$”.

– En todo triángulo, toda recta paralela a un lado forma con los otros dos lados un triángulo semejante al original.



El $\Delta\, PQO \sim \Delta\, MNO$

– Una forma práctica de ver si dos triángulos son semejantes, es mediante las siguientes reglas:

a) (A.A.) Si tienen 2 ángulos respectivamente iguales.

b) (L.A.L.) Si dos de sus lados son respectivamente proporcionales y el ángulo que forman es igual.

c) (L.L.L.) Si 3 lados son respectivamente proporcionales.

EJEMPLOS

1) Un triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$, el lado $AB = 6$, el $BC = 8$ y el $AC = 12$, en el triángulo $A'B'C'$ el lado $A'C' = 8$, ¿cuánto miden los lados $A'B'$ y $B'C'$?

Solución

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ entonces la razón de sus lados correspondientes es:

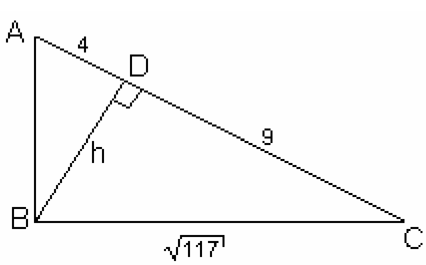
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ y sustituyendo valores:

$\frac{6}{A'B'} = \frac{8}{B'C'} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ separando igualdades se tiene:

$\frac{6}{A'B'} = \frac{3}{2}$; $A'B' = \frac{(6)(2)}{3} = 4$; $\frac{8}{B'C'} = \frac{3}{2}$; $B'C' = \frac{(8)(2)}{3} = \frac{16}{3}$

2) En la siguiente figura se muestra el triángulo rectángulo ABC, aplicando el concepto de semejanza obtener las magnitudes de la altura h y del lado AB.

Solución



Como $\Delta BDC \sim \Delta DAB$ se tiene:

$\frac{DC}{BD} = \frac{BD}{AD}$; $\frac{9}{h} = \frac{h}{4}$; $(9)(4) = h^2$; $h^2 = 36$

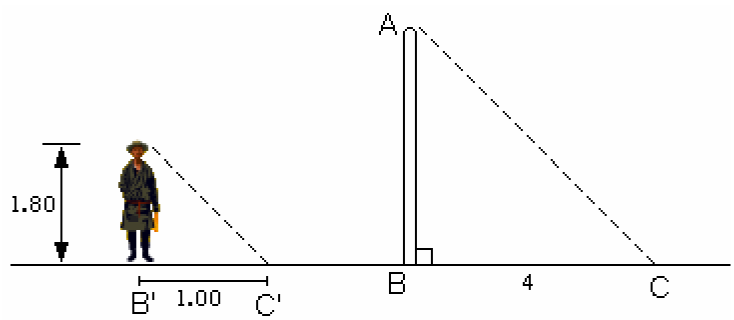
$h = \sqrt{36}$; $h = 6$

Como $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ se tiene:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD} \;;\; \frac{AB}{4} = \frac{\sqrt{117}}{6} \;;\; AB = \frac{4\sqrt{117}}{6} \;;\; AB \approx 7.21$$

3) Un señor de $1.80\,[m]$ de estatura proyecta un asombra de $1.00\,[m]$ a las $14:00\,[hr]$ y a la misma hora junto a el, un poste proyecta una sombra de $4.00\,[m]$, calcular la altura del poste.

<u>Solución</u>



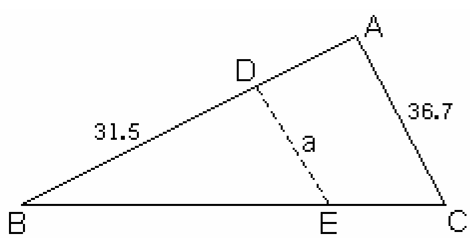
Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ entonces:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \;;\; \frac{AB}{1.80} = \frac{4}{1} \;;\; AB = \frac{(4)(1.80)}{1}$$

$$AB = 7.20\,[m]$$

4) En el triángulo ABC se traza una paralela al lado AC a 10 unidades del vértice A sobre el lado AB, calcular la magnitud de "a".

<u>Solución</u>



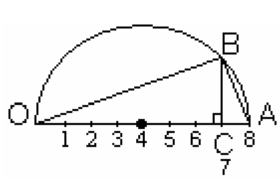
El $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} \;;\; \frac{36.7}{a} = \frac{41.5}{31.5}$$

$$a = \frac{(36.7)(31.5)}{41.5} = 27.86$$

5) En la siguiente figura se muestra una semicircunferencia con un triángulo inscrito, demostrar que la magnitud BC es $\sqrt{7}$.

<u>Solución</u>



Apoyándonos en la propiedad geométrica que "todo triángulo inscrito en una semicircunferencia con el lado OA como diámetro y el vértice B en cualquier punto sobre la semicircunferencia, es un triángulo rectángulo".

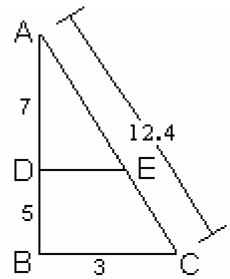
El método consiste en trazar una línea OA de longitud 8 unidades (una más de 7) haciendo centro a la mitad de OA (en el 4) se traza una semicircunferencia y por el punto que marca el 7 levantamos la perpendicular a OA hasta el punto B y por semejanza de triángulos:

$$\Delta OBC \sim \Delta BCA \; ; \; \frac{OC}{BC} = \frac{BC}{CA} \; ; \; (OC)(CA) = (BC)^2 \; ; \; (7)(1) = (BC)^2 \; ; \; BC = \sqrt{7}$$

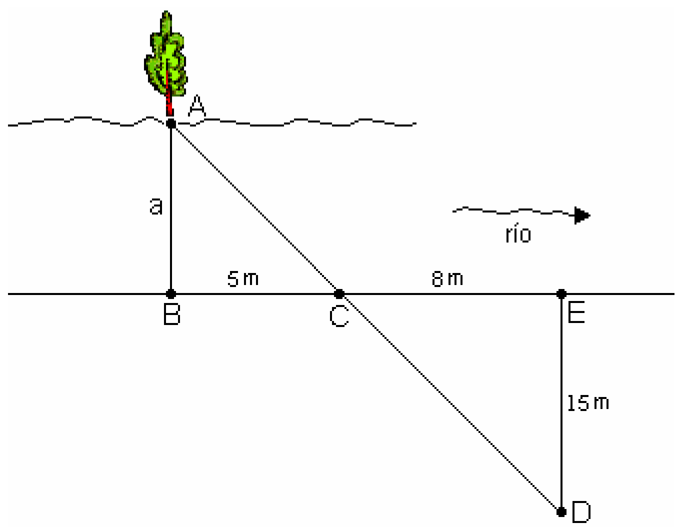
EJERCICIOS

1) Los triángulos JKL y $J'K'L'$ son semejantes, el lado $K'J' = 7$, el $L'K' = 3$ y el $L'J' = 4$, el $LJ = 8$ ¿cuál es la magnitud de los lados LK y KJ?

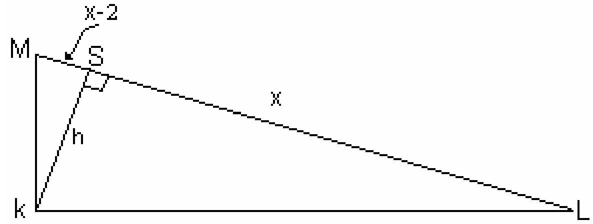
2) En el triángulo rectángulo ABC de la figura, se traza una paralela al lado BC a 5 unidades del vértice B sobre el cateto AB, se pide obtener la magnitud del lado DE y AE.



3) En una margen de río, se localiza un árbol (A), en la otra margen un topógrafo localiza con sus aparatos los puntos A, B, C, D y E, con este trabajo, se quiere conocer el ancho del río (a).



4) En un triángulo rectángulo KLM se traza la altura "h" del lado ML cuya longitud es de $9\,[m]$, se pide calcular la longitud de los segmentos MS y SL si el segmento MS es $2\,[m]$ menor que el segmento SL.

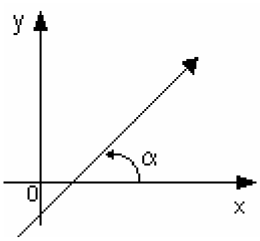


5) Obtener la magnitud de $\sqrt{10}$

4.9. PENDIENTE DE UNA RECTA. CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

PENDIENTE DE UNA RECTA

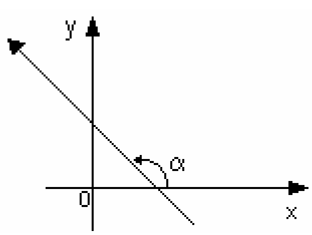
En un sistema de coordenadas cartesiano rectangular tracemos una línea recta dirigida L, el ángulo α que se mide en el sentido positivo $+$ desde el eje x hasta la recta L se llama *"ángulo de inclinación de la recta"* y su variación es de cero grados a ciento ochenta grados, es decir: $0^0 \le \alpha \le 180^0$.



La tangente del ángulo de inclinación α de una recta con el eje x se llama PENDIENTE de la recta y es una característica fundamental de la dirección de la recta.

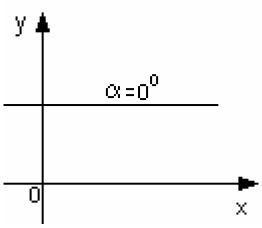
Denotaremos con la letra "m" minúscula la pendiente de cualquier recta.

$$\boxed{m = \tan\alpha}$$

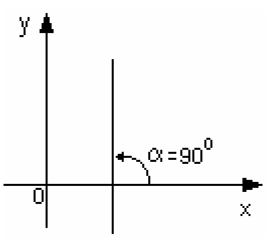


– Si $\alpha = 0^0 \Rightarrow \tan 0^0 = 0$; $m = 0$

– Si $\alpha = 90^0 \Rightarrow \tan 90^0$ no está definida y por lo tanto la pendiente "m" no existe.



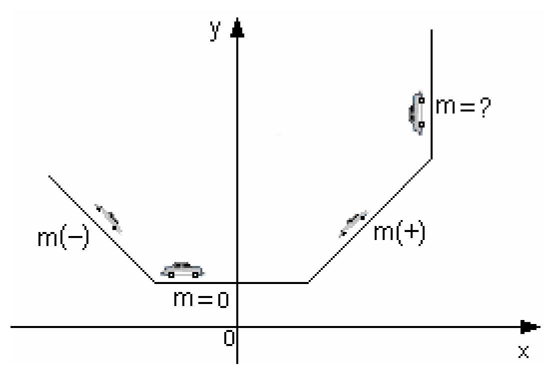
– Si α es un ángulo agudo o sea mayor que 0^0 y menor que 90^0 ($0^0 < \alpha < 90^0$), la pendiente es positiva, $m > 0$.



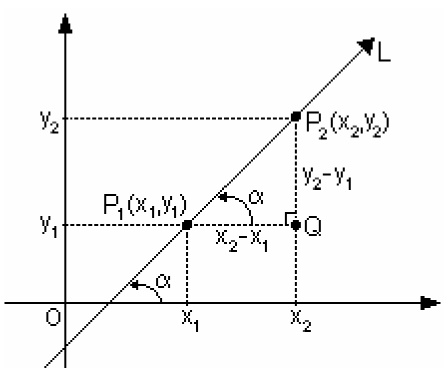
– Si α es un ángulo obtuso, mayor que 90^0 y menor que 180^0 ($90^0 < \alpha < 180^0$), la pendiente es negativa, $m < 0$.

– El valor de la pendiente de cualquier recta en el plano puede ser cualquier número real ($m \in \mathbb{R}$).

<u>Una regla</u> muy simple para recordar este concepto del signo de la pendiente de una recta es la siguiente: Imaginemos coches circulando en una carretera de izquierda a derecha, si bajan los coches la pendiente es negativa, si van en planito la pendiente es nula, si suben, la pendiente es positiva y si pudieran ir como moscas sobre un camino vertical, la pendiente no existe.



La PENDIENTE de una recta arbitraria L (que no sea perpendicular al eje x) conocidas las coordenadas de 2 de sus puntos diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ como se muestra en la construcción de la siguiente figura:



En el triángulo rectángulo P_1QP_2 se tiene:

Si $m = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $x_1 \neq x_2$ ••• (A)

el orden en que se tomen las coordenadas de los puntos puede ser también:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \; ; \; x_1 \neq x_2 \quad \bullet\bullet\bullet \text{(A')}$$

y el resultado de la pendiente es el mismo.

<u>Gráficamente</u> la pendiente indica que para ir del punto P_1 al punto P_2 es la razón del avance vertical ($y_2 - y_1$) entre lo que se avanza horizontalmente ($x_2 - x_1$).

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

En Geometría Analítica plana es muy importante saber cuando 2 rectas son paralelas o perpendiculares entre sí.

Supongamos que conocemos las pendientes m_1 y m_2 de las rectas L_1 y L_2, si α_1 y α_2 son sus ángulos de inclinación respectivamente, las rectas L_1 y L_2 son <u>PARALELAS</u> si y solo si $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$ y como $\tan\alpha_1 = m_1$ y $\tan\alpha_2 = m_2$, se concluye que la recta L_1 es paralela a la recta L_2 si y solo si sus pendientes m_1 y m_2 son iguales, o sea:

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

Dos rectas L_1 y L_2 son <u>PERPENDICULARES</u> entre si cuando $m_1 m_2 = -1$ o lo que es lo mismo, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, lo cual se acostumbra diciendo que “sus pendientes sean recíprocas y de signo contrario”, o sea:

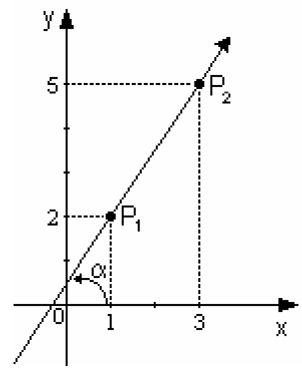
$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Estas condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre 2 rectas nos ayudan a determinar por simple inspección visual si existe paralelismo o perpendicularidad cuando conocemos las pendientes respectivas.

EJEMPLOS

En cada inciso determine la pendiente "m" y el ángulo de inclinación "α" de la recta que pasa por los puntos dados y dibuje su gráfica:

1) $P_1(1,2)$, $P_2(3,5)$



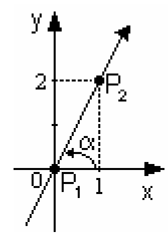
Solución

Si $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{5-2}{3-1}=\dfrac{3}{2}$, el mismo valor se obtiene si la calculamos con $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2-5}{1-3}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$ cuidando el orden.

Como $\tan\alpha=m$; $\tan\alpha=\dfrac{3}{2}$; $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)=56.31^0$

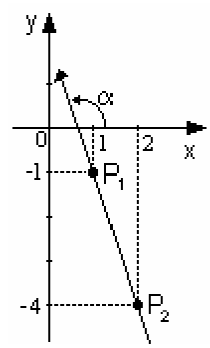
2) $P_1(0,0)$, $P_2(1,2)$

Solución



$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2-0}{1-0}=\dfrac{2}{1}=2$; $\alpha=\tan^{-1}(2)=63.43^0$

3) $P_1(1,-1)$, $P_2(2,-4)$



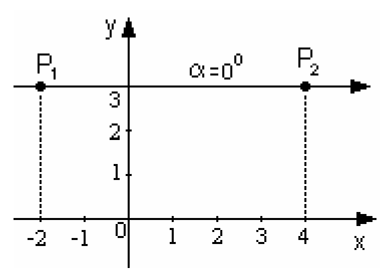
Solución

$m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{-1-(-4)}{1-2}=\dfrac{-1+4}{1-2}=\dfrac{3}{-1}=-3$

como la pendiente es negativa $m=-3$, entonces α es ángulo obtuso y $90^0<\alpha<180^0$ por lo que:

$\alpha=180^0-\tan^{-1}(3)=180^0-71.57^0=108.43^0$

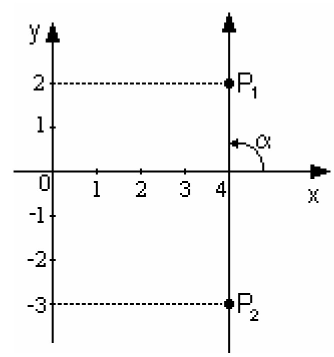
4) $P_1(-2,3)$, $P_2(4,3)$



Solución

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{3-3}{4-(-2)}=\dfrac{0}{6}=0$; $\alpha=\tan^{-1}(0)=0^0$

5) $P_1(4,2)$, $P_2(4,-3)$



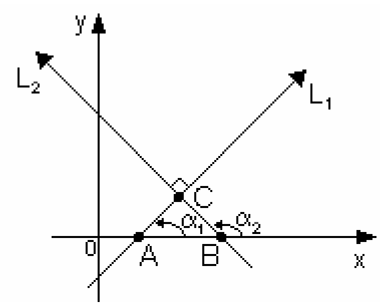
Solución

$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{2-(-3)}{4-4} = \dfrac{2+3}{0} = \dfrac{5}{0}$; no existe

$\alpha = 90^0$

6) Demostrar que 2 rectas perpendiculares entre sí cumplen la condición "que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario".

Solución



Supongamos que en la siguiente figura, efectivamente las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares mutuamente. α_1 y α_2 son los ángulos de inclinación de L_1 y L_2 respectivamente.

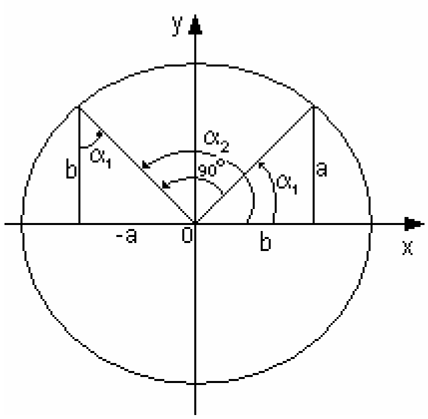
La geometría nos indica que el ángulo exterior α_2 en el vértice B del triángulo ABC es igual a la suma de los ángulos opuestos interiores α_1 y 90^0 o sea:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$$

y consecuentemente la $\tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90^0)$ y como

$\tan(\alpha_1 + 90^0) = -\cot\alpha_1 = \dfrac{-1}{\tan\alpha_1}$ y si $\tan\alpha_2 = m_2$ y $\tan\alpha_1 = m_1$,

entonces $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$



Nota: En esta figura, se muestra porqué la $\tan(\alpha_1 + 90^0) = -\cot\alpha_1$, de la figura vemos que $\tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90^0) = \dfrac{b}{-a}$ y si $\cot\alpha_1 = \dfrac{b}{a}$ entonces $-\cot\alpha_1 = -\dfrac{b}{a}$, por lo tanto $\tan\alpha_2 = -\cot\alpha_1 = -\dfrac{1}{\tan\alpha_1}$

7) Los vértices de un triángulo son $A(4,0)$, $B(0,1)$ y $C(2,9)$, demuestre que pertenecen a un triángulo rectángulo.

Solución

Calculando la pendiente de cada lado:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-0}{0-4}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}\ ;\ m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{9-1}{2-0}=\frac{8}{2}=4$$

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{9-0}{2-4}=\frac{9}{-2}=-\frac{9}{2}$$

Como las pendientes de los lados AB y BC son recíprocas y de signo contrario, si es un triángulo rectángulo.

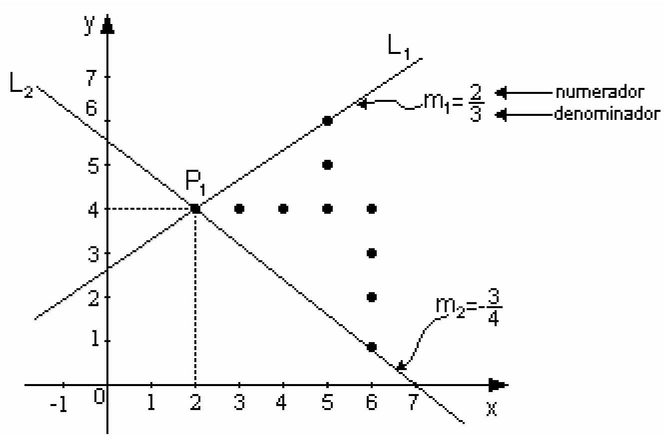
8) Verificar que los puntos $P_1(-2,-3)$, $P_2(2,2)$ y $P_3(6,7)$ son colineales.

<u>Solución</u>

Si la pendiente de P_1 a P_2 es igual que la pendiente de P_1 a P_3, entonces si son colineales (o sea que están sobre la misma recta): $m_{12}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$; $m_{13}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{7+3}{6+2}=\frac{5}{4}$ luego entonces, si son colineales.

9) Dibujar las rectas que pasan por el mismo punto $P_1(2,4)$ y cuyas pendientes son $m_1=\frac{2}{3}$ y $m_2=-\frac{3}{4}$.

<u>Solución</u>



La forma que se recomienda es la siguiente: el denominador será siempre el número positivo y se avanzará hacia la derecha a partir del punto P_1 y el numerador si es positivo irá hacia arriba y si es negativo hacia abajo después del avance horizontal del denominador como se muestra en la figura de la izquierda.

10) Muestre que los segmentos que unen los puntos medios del cuadrilátero cuyos vértices son $A(-2,-4)$, $B(5,-1)$, $C(3,3)$, y $D(-3,5)$ forman un paralelogramo.

<u>Solución</u>

Primero calculamos los puntos medios de cada lado:

$$AB:\ M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-2+5}{2},\frac{-4-1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{-5}{2}\right)$$

$$BC:\ M_{BC}\left(\frac{x_C+x_B}{2},\frac{y_C+y_B}{2}\right)=\left(\frac{3+5}{2},\frac{3-1}{2}\right)=(4,1)$$

$$CD:\ M_{CD}\left(\frac{x_D+x_C}{2},\frac{y_D+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-3+3}{2},\frac{5+3}{2}\right)=(0,4)$$

$$AD:\ M_{AD}\left(\frac{x_D+x_A}{2},\frac{y_D+y_A}{2}\right)=\left(\frac{-3-2}{2},\frac{5-4}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Ahora calculamos las pendientes de los segmentos que unen los puntos medios de cada lado:

$$M_{AB}M_{BC}:\ m=\frac{\frac{-5}{2}-1}{\frac{3}{2}-4}=\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{7}{5} \quad ; \quad M_{BC}M_{CD}:\ m=\frac{1-4}{4-0}=-\frac{3}{4}$$

$$M_{CD}M_{AD}:\ m=\frac{4-\frac{1}{2}}{0+\frac{5}{2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{7}{5} \quad ; \quad M_{AD}M_{AB}:\ m=\frac{\frac{-5}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=\frac{-\frac{6}{2}}{\frac{8}{2}}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

Como el lado $M_{AB}M_{BC}$ es paralelo al lado $M_{CD}M_{AD}$ (pendientes iguales) y el lado $M_{BC}M_{CD}$ es paralelo al $M_{AD}M_{AB}$, entonces si es un paralelogramo.

EJERCICIOS

1) Los puntos $A(0,-4)$, $B(-3,-2)$, $C(0,5)$, $D(5,3)$ y $E(4,-3)$ son los vértices de un polígono, obtener la pendiente de cada lado y su ángulo de inclinación.

2) Demuestre que si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas entonces $m_1=m_2$.

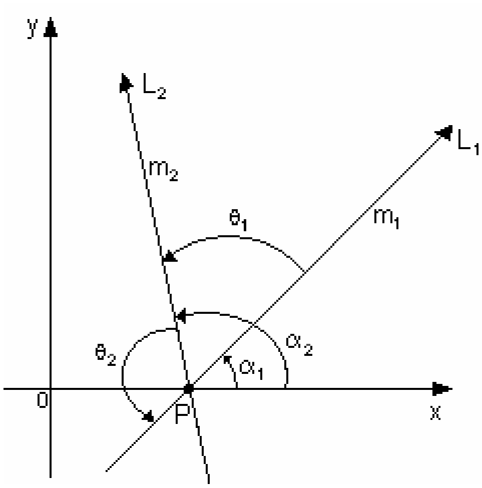
3) Los puntos $A(4,1)$, $B(1,2)$ y $C(-2,3)$ están alineados, demostrarlo.

4) En cada inciso, dibujar la recta que pasa por el punto P_1 con pendiente dada:
a) $P_1(3,4), m=0$; b) $P_1(-4,2), m=-1$; c) $P_1(5,0), m=2$; d) $P_1(-1,-1), m=$ no definida;
e) $P_1(0,0), m=-\frac{2}{5}$.

5) Los puntos $P_1(-1,-3)$, $P_2(4,-3)$, $P_3(4,2)$ y $P_4(-1,2)$ son la vértices de un cuadrado muestre que sus diagonales son perpendiculares entre sí.

4.10. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Consideremos dos rectas L_1 y L_2 que se intersectan en un punto P cualquiera del plano coordenado, sus ángulos de inclinación y sus pendientes son respectivamente α_1, m_1 y α_2, m_2 como se muestra en la siguiente figura:



El problema consiste en determinar la medida de θ_1 y θ_2 que como se ve, son ángulos suplementarios o sea que $\theta_1 + \theta_2 = 180^0$, al conocer alguno de los dos se conoce el otro de inmediato. Todos los ángulos están trazados en el sentido positivo +, de la figura observamos que $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ y calculando la tangente en ambos miembros se tiene:

$$\tan\theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1} \text{ ; si } \tan\alpha_2 = m_2 \text{ y } \tan\alpha_1 = m_1$$

entonces $\tan\theta_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

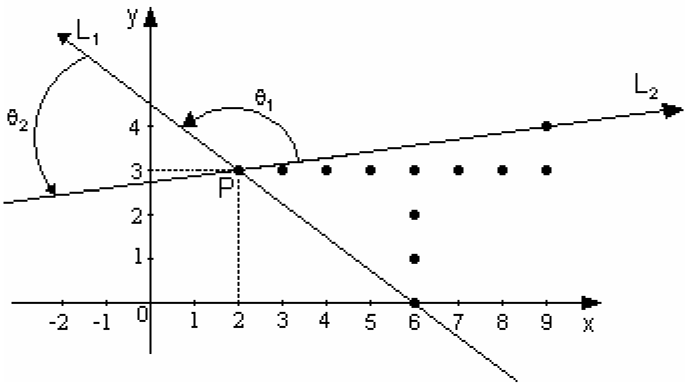
Una forma sencilla para recordar esta fórmula es la siguiente: con ayuda de la figura y el trazo de los ángulos θ_1 y θ_2, decimos que la tangente del ángulo θ_1 es igual a la pendiente de la recta donde termina la flecha (m_2), menos la pendiente de la recta donde inicia la flecha (m_1), esta diferencia dividida entre uno más el producto de las dos pendientes ($1 + m_2 m_1$).

De esta forma, para calcular el ángulo suplementario θ_2 es: $\tan\theta_2 = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$; con $m_1 m_2 \neq -1$

EJEMPLOS

1) Dos rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son $m_1 = -\dfrac{3}{4}$, $m_2 = \dfrac{1}{7}$ respectivamente, se cruzan en el punto $P(2,3)$, obtener el ángulo que forman y hacer un dibujo del problema.

Solución



Como en realidad no se especifica claramente cuál ángulo es el que se pide calcular, lo más recomendable es conocer los dos ángulos suplementarios θ_1 y θ_2 como sigue:

$$\tan\theta_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{7}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{-21-4}{28}}{1 - \frac{3}{28}}$$

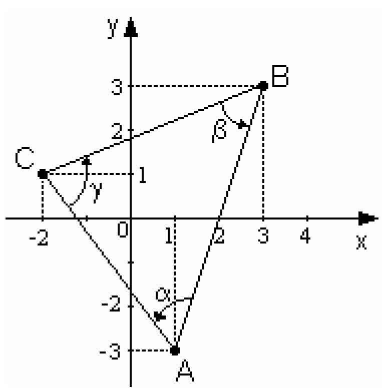
$$\tan\theta_1 = \frac{-\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = -1$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(-1) = 180^0 - \tan^{-1}(1) = 180^0 - 45^0 = 135^0$$

$\theta_1 = 135^0$ y $\theta_2 = 45^0$ ya que $\theta_1 + \theta_2 = 135^0 + 45^0 = 180^0$

2) Los vértices de un triángulo son $A(1,-3)$, $B(3,3)$ y $C(-2,1)$ se pide obtener los ángulos interiores y hacer un dibujo del problema.

Solución



Las pendientes de los lados del triángulo son:

$$m_{AB} = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$m_{BC} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

$$m_{AC} = \frac{1+3}{-2-1} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{m_{AC} - m_{AB}}{1 + m_{AC} m_{AB}} = \frac{-\frac{4}{3} - 3}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)(3)} = \frac{\frac{-4-9}{3}}{1-4} = \frac{13}{9}$$

$$\tan\alpha = \frac{13}{9}\ ;\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right) = 55.31^0$$

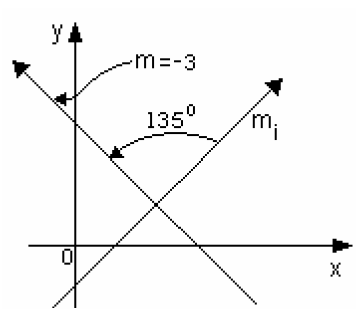
$$\tan\beta = \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB}m_{BC}} = \frac{3 - \frac{2}{5}}{1 + (3)\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{15-2}{5}}{\frac{5+6}{5}} = \frac{13}{11} \;;\; \beta = \tan^{-1}\left(\frac{13}{11}\right) = 49.76^0$$

$$\tan\gamma = \frac{m_{BC} - m_{AC}}{1 + m_{BC}m_{AC}} = \frac{\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{6+20}{15}}{\frac{15-8}{15}} = \frac{26}{7} \;;\; \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{26}{7}\right) = 74.93^0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 55.31^0 + 49.76^0 + 74.93^0 = 180^0$$

3) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135^0, sabiendo que la recta donde termina la flecha que mide a este ángulo es -3, se pide calcular la pendiente de la recta inicial (m_i).

<u>Solución</u>



Un bosquejo de la gráfica del problema puede ser el siguiente:

$$\tan 135^0 = \frac{-3 - m_i}{1 + (-3)(m_i)}$$

$$-1 = \frac{-3 - m_i}{1 - 3m_i} \;;\; (-1)(1 - 3m_i) = -3 - m_i$$

$$-1 + 3m_i = -3 - m_i$$

$$3m_i + m_i = -3 + 1$$

$$4m_i = -2 \;;\; m_i = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

4) Verificar la fórmula $\tan\theta_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

<u>Solución</u>

Recordando la figura al inicio del tema 4.10, se tiene que $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ y calculando la tangente a ambos miembros:

$$\tan\theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

donde $sen(\alpha_2 - \alpha_1) = sen\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 sen\alpha_1$

y $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1$

sustituyendo estas en la anterior tenemos: $\dfrac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \dfrac{sen\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 sen\alpha_1}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1}$

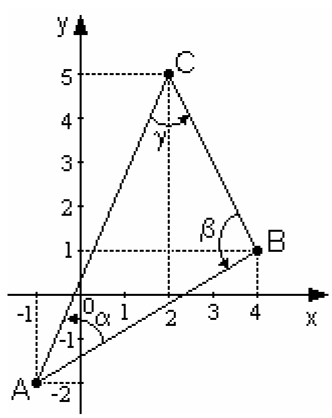
dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha_2 \cos\alpha_1$:

$$\frac{\dfrac{sen\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 sen\alpha_1}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1}}{\dfrac{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1}} = \frac{\dfrac{sen\alpha_2}{\cos\alpha_2} - \dfrac{sen\alpha_1}{\cos\alpha_1}}{1 + \dfrac{sen\alpha_2}{\cos\alpha_2} \cdot \dfrac{sen\alpha_1}{\cos\alpha_1}} = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

y como $\tan\alpha_2 = m_2$ y $\tan\alpha_1 = m_1$ entonces: $\tan\theta_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

5) ¿Cuánto mide el menor ángulo interno del triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2)$, $B(4,1)$ y $C(2,5)$?

Solución



Calculando la pendiente de cada lado del triángulo:

$$m_{AB} = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5} \; ; \; m_{BC} = \frac{1-5}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2 \; ; \; m_{AC} = \frac{5+2}{2+1} = \frac{7}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{5}}{1 + \left(\dfrac{7}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right)} = \frac{\dfrac{35-19}{15}}{\dfrac{15+21}{15}} = \frac{26}{36} = \frac{13}{8}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{13}{8}\right) = 35.84^0$$

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{3}{5} + 2}{1 + \left(\dfrac{3}{5}\right)(-2)} = \frac{\dfrac{3+10}{5}}{\dfrac{5-6}{5}} = \frac{13}{-1} = -13 \; ; \; \beta = 180^0 - \tan^{-1}(13) = 180^0 - 85.60^0 = 94.40^0$$

$$\tan\gamma = \frac{-2 - \dfrac{7}{3}}{1 + (-2)\left(\dfrac{7}{3}\right)} = \frac{\dfrac{-6-7}{3}}{\dfrac{3-14}{3}} = \frac{-13}{-11} = \frac{13}{11} \; ; \; \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{13}{11}\right) = 49.76^0$$

El menor ángulo interno es $\alpha = 35.84^0$

Nota: Como el valor absoluto de la $\tan\alpha$ es menor que el valor absoluto de las otras dos, esto indica que será el valor del menor ángulo interno, esto es: $\left|\dfrac{13}{18}\right| < \left|\dfrac{13}{11}\right| < |-13|$ y solo calculamos α.

EJERCICIOS

1) En el punto $P(4,-2)$ se intersectan las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son $m_1 = \frac{1}{3}$ y $m_2 = 4$ respectivamente, obtenga el ángulo que forman y dibuje su gráfica.

2) Dos rectas se cruzan formando un ángulo de 35^0, se sabe que la recta donde inicia la flecha que mide este ángulo es de pendiente $\frac{3}{2}$, obtenga la pendiente de la recta donde termina la flecha.

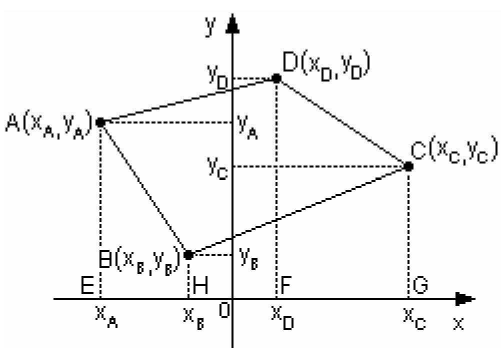
3) Verificar a partir de la fórmula $\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$, que las dos rectas L_1 y L_2 son paralelas.

4) ¿Cuánto mide el menor ángulo interno del triángulo cuyos vértices son $A(-4,-2)$, $B(5,-1)$ y $C(-2,2)$?

5) La recta L_1 pasa por los puntos $A(-2,-2)$ y $B(5,2)$ y la recta L_2 pasa por los puntos $C(4,3)$ y $D(3,y)$, las dos rectas se cruzan en algún punto formando un ángulo de 40^0, se pide obtener la ordenada "y" del punto D.

4.11. CÁLCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO

El cálculo del área de cualquier polígono cerrado, como por ejemplo el que se muestra en la figura, se puede obtener componiendo de varios trapecios como sigue:



Área del polígono $ABCD =$ Área del trapecio $AEFD +$ Área del trapecio $DFGC -$ Área del trapecio $AEHB -$ Área del trapecio $BHGC$:

Recordemos que el área de un trapecio es igual a la semisuma de sus lados paralelos multiplicada por la altura.

Área del polígono:

$$ABCD = \frac{1}{2}\left[(y_D + y_A)(x_D - x_A) + (y_D + y_C)(x_C - x_D) - (y_A + y_B)(x_B - x_A) - (y_C + y_B)(x_C - x_B)\right] \quad \text{...(A)}$$

Arreglando algebraicamente esta expresión (A), se puede presentar de las siguientes 2 formas que simplifican su aprendizaje:

1ª Forma.

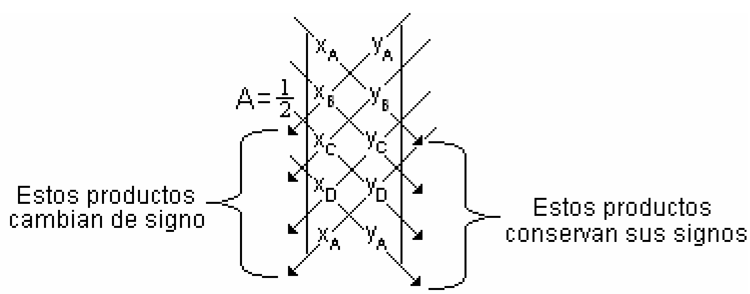
Eligiendo arbitrariamente cualquier vértice del polígono $ABCD$, digamos el vértice A, se dice que el área del polígono es igual a la abscisa del vértice $A\,(x_A)$ multiplicada por la diferencia de ordenadas del vértice que le sigue menos el que le antecede $(y_B - y_D)$ y se pasa al siguiente vértice en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (B) para que el área del polígono sea con valor positivo, en seguida se repite la regla, o sea que se suma el siguiente producto de la abscisa de $B(x_B)$ por la diferencia de ordenadas del vértice que le sigue menos el que le antecede o sea $x_B(y_C - y_A)$ y así se continua la regla hasta llegar al último vértice D y todo se multiplica por $\frac{1}{2}$, quedando la forma como sigue:

$$A = \frac{1}{2}\left[x_A(y_B - y_D) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_D - y_B) + x_D(y_A - y_C)\right]$$

Aparentemente la explicación es larga pero es muy fácil aprenderla.

2ª Forma.

El desarrollo algebraico de la expresión (A) se puede expresar como un arreglo en forma de determinante con las coordenadas de los vértices del polígono leyéndolas en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, partiendo también de un vértice arbitrario, por ejemplo del vértice A o del que sea, hasta repetir el vértice inicial como sigue:



Para resolver este arreglo, deberán efectuarse los productos como indican las flechas.

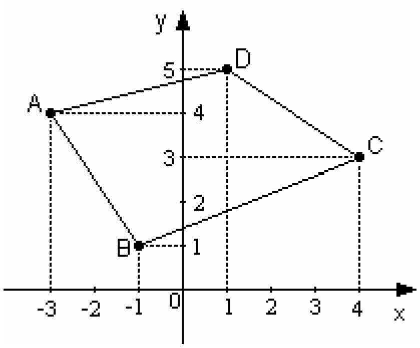
Nota: No olvidar que el orden correcto de la lectura de los vértices es muy importante.

EJEMPLOS

1) Los vértices de un polígono son $A(-3,4)$, $B(-1,1)$, $C(4,3)$ y $D(1,5)$, se pide calcular su área por las 2 formas.

Solución

<u>1ª Forma.</u> Iniciemos con el vértice “B” y en el orden se tiene:



$$A=\frac{1}{2}\left[x_B\left(y_C-y_A\right)+x_C\left(y_D-y_B\right)+x_D\left(y_A-y_C\right)+x_A\left(y_B-y_D\right)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\left[(-1)(3-4)+(4)(5-1)+(1)(4-3)+(-3)(1-5)\right]$$

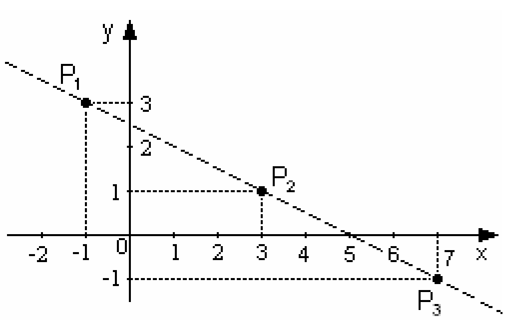
$$A=\frac{1}{2}\left[1+16+1+12\right]=\frac{1}{2}(30)=15\left[u^2\right]$$ (unidades cuadradas)

<u>2ª Forma.</u> Iniciemos con el vértice “D” :

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_D & y_D\\ x_A & y_A\\ x_B & y_B\\ x_C & y_C\\ x_D & y_D\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ -3 & 4\\ -1 & 1\\ 4 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(4-3-3+20+15+4-4-3)=\frac{1}{2}(30)=15\left[u^2\right]$$

2) Muestre que los puntos $P_1(-1,3)$, $P_2(3,1)$, $P_3(7,-1)$ están alineados.

<u>Solución</u>

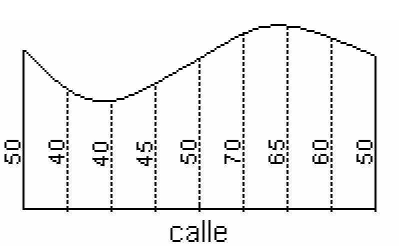


Si el área es igual a cero, los tres puntos están alineados, pues una línea recta no tiene área.

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\\ 7 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-1-3+21-9-7-1)$$

$A=\frac{1}{2}(0)=0\left[u^2\right]$ Si estan alineados P_1, P_2 y P_3.

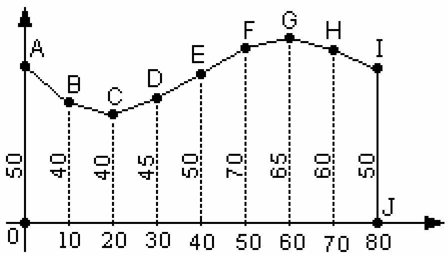
3) Si tiene un terreno de forma irregular como se muestra en la figura, se quiere saber cuál es su área aproximada si se cuenta con las medidas indicadas en metros.



El ancho de los intervalos es de $10[m]$

Solución

Colocamos la figura sobre un sistema coordenado rectangular y unimos con rectas cada extremo medido y así formamos un polígono como sigue:



$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} 0 & 50 \\ 0 & 0 \\ 80 & 0 \\ 80 & 50 \\ 70 & 60 \\ 60 & 65 \\ 50 & 70 \\ 40 & 50 \\ 30 & 45 \\ 20 & 40 \\ 10 & 40 \\ 0 & 50 \end{array}\right| = \frac{1}{2}(0+0+4000+4800+4550+4200+2500+$$

$$1800+1200+800+500-0-0-0-$$

$$-3500-3600-3250-2800-1500-$$

$$-900-400-0)=\frac{1}{2}(8400)$$

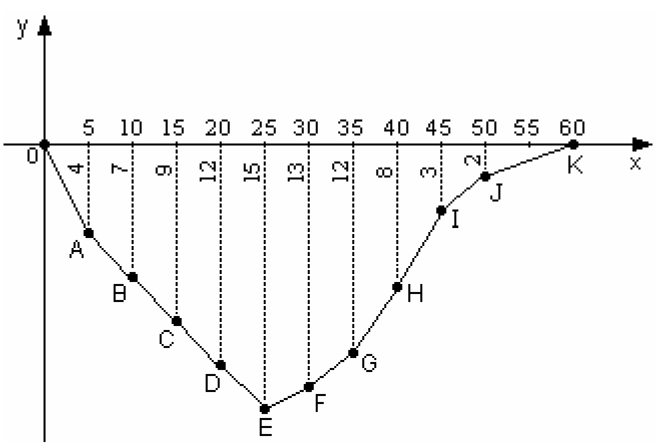
$$A=4200\left[m^2\right] aprox.$$

4) La sección transversal de un río de $60[m]$ de ancho se muestra en la siguiente tabla, la profundidad " y " es medida a una distancia " x " de la orilla, calcular su área aproximada.

$x[m]$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
$y[m]$	0	4	7	9	12	15	13	12	8	3	2	0

Solución

Los datos de la tabla los llevamos a un sistema coordenado rectangular para formar un polígono como sigue:



$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 5 & -4 \\ 10 & -8 \\ 15 & -9 \\ 20 & -12 \\ 25 & -15 \\ 30 & -13 \\ 35 & -12 \\ 40 & -8 \\ 45 & -3 \\ 50 & -2 \\ 60 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\quad(0-40-90-180-300-325-$$

$$-360-280-120-90+0+0+$$

$$+0+40+120+180+300+$$

$$+450+455+480+360+150+$$

$$+120+0)=\frac{870}{2}=435\left[m^2\right]$$

5) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A(-3,4)$, $B(2,-3)$ y $C(4,1)$, hacer esto en las 2 formas.

Solución

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(16+9+2+3-8+12)=\frac{1}{2}(34)=17\left[u^2\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\left[x_C(y_A-y_B)+x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)\right]=\frac{1}{2}\left[4(4+3)-3(-3-1)+2(1-4)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\left[28+12-6\right]=\frac{1}{2}(34)=17\left[u^2\right]$$

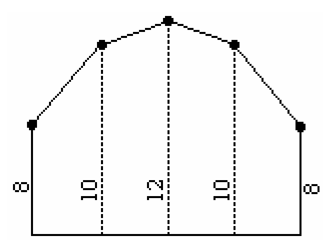
EJERCICIOS

1) Calcular el área del triángulo $P_1(0,7)$, $P_2(0,2)$ y $P_3(4,4)$.

2) Calcular el área del polígono $A(-1,2)$, $B(0,6)$, $C(4,3)$, $D(6,5)$, $E(8,2)$ y $F(3,-1)$.

3) Verifique que los puntos $P_1(-2,-1)$, $P_2(0,0)$, $P_3(2,1)$ y $P_4(4,2)$ son colineales.

4) La siguiente figura muestra la sección transversal de un túnel que se va a construir para el METRO, calcular su área si el ancho de los intervalos es de 3 metros cada uno.



5) Calcular el área del contorno punteado de la siguiente figura: