VI. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

6.1. ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

En el capítulo anterior (V), se trató uno de los problemas centrales de la Geometría Analítica (Discutir una ecuación) para trazar su gráfica, un segundo problema central de la Geometría Analítica es el que trataremos aquí y consiste en “Dada una curva definida por ciertas condiciones geométricas, obtener su ecuación” dando esto origen al concepto de lugar geométrico.

El lugar geométrico de una ecuación de la forma $f(x,y)=0$, son todos los puntos (x,y) cuyas coordenadas x,y satisfacen dicha ecuación.

Dos números reales x_0 y y_0 satisfacen a una ecuación en dos variables de la forma $f(x,y)=0$, si al sustituirlos en la ecuación en lugar de las variables x y y resulta una igualdad verdadera, por ejemplo los números $x=3$ y $y=2$ satisfacen la ecuación $x^2+y^2-13=0$, entonces se dice que el punto de coordenadas $(3,2)$ se sitúa sobre la gráfica de $x^2+y^2-13=0$, de lo contrario, no lo estaría.

Encontrar un lugar geométrico, equivale a encontrar la ecuación que lo representa.

Es conveniente describir un lugar geométrico como la trayectoria de un punto $P(x,y)$ que se mueve de acuerdo a ciertas restricciones debidamente especificadas.

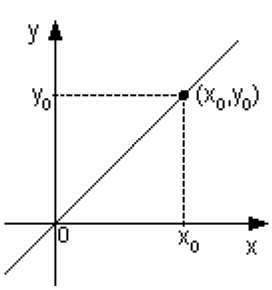
EJEMPLOS

En cada inciso, se pide deducir la ecuación del lugar geométrico de acuerdo a las restricciones indicadas.

1) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ que durante su movimiento está situado en el 1° y 3° cuadrantes a igual distancia de los ejes coordenados x y y.

Solución

El lugar geométrico de los puntos (x,y) cuyas coordenadas satisfacen las restricciones dadas, está representado por la ecuación $x-y=0$ ó $y=x$, cuya gráfica se muestra.

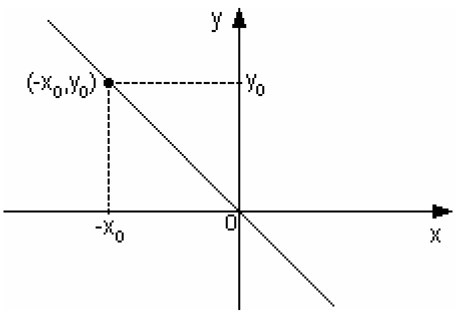


Cualquier punto de coordenadas (x_0,y_0) donde $y_0=x_0$, está sobre la recta $y=x$ que es la ecuación del lugar geométrico que resuelve el problema.

2) La trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento está situado en el 2° y 4° cuadrantes a igual distancia de los ejes coordenados.

Solución

El lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las restricciones del problema, está representado por la ecuación $x + y = 0$ ó $y = -x$ cuya gráfica es:

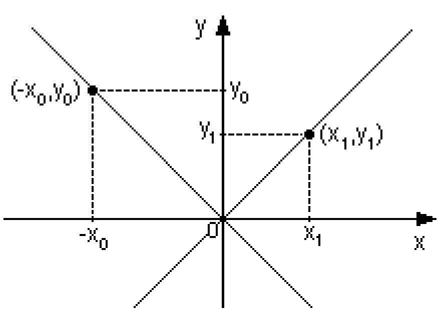


Cualquier punto de coordenadas (x_0, y_0) donde $y_0 = -x_0$ está sobre la recta $y = -x$ que es la ecuación del lugar geométrico que resuelve el problema.

3) La trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento está situado en el 1° y 3° cuadrantes y en el 2° y 4° cuadrantes a igual distancia de los ejes coordenados.

Solución

El lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las restricciones dadas, está representado por la ecuación $(x - y)(x + y) = 0$ ó $x^2 - y^2 = 0$, esto es, por las dos rectas $y = x$ y $y = -x$ cuya gráfica es:



Cualquier punto de coordenadas (x_0, y_0) donde $y_0 = -x_0$ está sobre $y = -x$, cualquier punto de coordenadas (x_1, y_1) donde $y_1 = x_1$ está sobre la recta $y = x$, que son las ecuaciones del lugar geométrico que resuelve el problema.

4) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento, equidista de los extremos de un segmento de recta $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$.

Solución

Recordar que la palabra equidistar significa igualdad de distancias, por lo que las distancias $AP = BP$, lo que algebraicamente es:

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando y simplificando términos semejantes:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

$$x^2-2xx_A+x_A^2+y^2-2yy_A+y_A^2=x^2-2xx_B+x_B^2+y^2-2yy_B+y_B^2$$

$$2xx_B-2xx_A+2yy_B-2yy_A+x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2=0$$

$$2x(x_B-x_A)+2y(y_B-y_A)+x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2=0$$

Esta última expresión es la ecuación del lugar geométrico con las restricciones dadas.

5) Obtener la ecuación de la trayectoria del punto $P(x,y)$ que durante su movimiento, se encuentra a la misma distancia "r" del punto $A(x_A,y_A)$.

Solución

Si en la trayectoria del punto $P(x,y)$, este siempre se encuentra a la misma distancia "r" del punto $A(x_A,y_A)$ entonces: $AP=r$, esto algebraicamente es:

$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=r$, elevando ambos miembros, desarrollando y ordenando términos se tiene:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$$

$$x^2-2xx_A+x_A^2+y^2-2yy_A+y_A^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-2x_Ax-2y_Ay+x_A^2+y_A^2-r^2=0$$

Esta última expresión es la ecuación del lugar geométrico del problema.

EJERCICIOS

En cada inciso deduzca la ecuación del lugar geométrico.

1) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento se conserve siempre equidistante de los puntos $A(-2,1)$ y $B(4,5)$.

2) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento se encuentra a la distancia $r=3$ unidades del punto $A(2,-1)$.

3) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que se mueve sobre una línea recta que pasa por el punto $A(3,-2)$ y tiene pendiente $m=2$.

4) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento, su distancia al eje "y" es igual a su distancia con el punto $A(3,0)$.

5) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento está 2 veces más alejado del eje "y" que del punto $A(3,0)$.

6.2. DEFINICIÓN DE RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

El objetivo fundamental de la Geometría Analítica es el estudio de las ecuaciones algebraicas de la forma $f(x,y)=0$, en el presente capítulo y en los siguientes continuaremos su estudio con ecuaciones algebraicas de la forma siguiente:

$$Ax+By+C=0 \quad \text{———} \quad (\mathrm{I})$$
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \text{———} \quad (\mathrm{II})$$
$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+Fxy+Gy^2+Hx+Iy+k=0 \quad \text{———} \quad (\mathrm{III})$$
$$\vdots$$

En donde $A,B,C,D,\ldots$ son números reales y son los coeficientes numéricos de las ecuaciones. La ecuación (I) se llama <u>"ecuación general de primer grado"</u>, donde A y B no pueden ser simultáneamente cero. La ecuación (II) se llama <u>"ecuación general de segundo grado"</u>, donde A,B y C no sean simultáneamente cero. La ecuación (III) se llama <u>"ecuación general de tercer grado"</u>, donde los coeficientes A,B,C y D no sean simultáneamente cero. Las ecuaciones de grados mayores se expresan de forma análoga.

Es conveniente aclarar que en este libro se estudiarán únicamente las de las formas (I) y (II).

<u>Definición.</u>

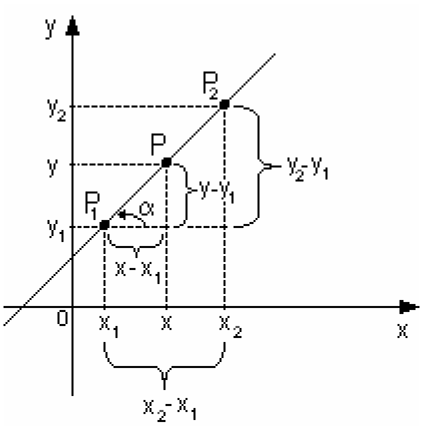
El lugar geométrico de una ecuación de primer grado $Ax+By+C=0$ es una línea recta y recíprocamente, toda línea recta se determina por una ecuación de primer grado.

- Se dice que toda ecuación de la forma (I) es lineal.

6.3. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS:

a) DOS PUNTOS.
b) LA PENDIENTE Y UN PUNTO.
c) LA PENDIENTE Y LA ORDENADA AL ORIGEN.
d) LAS INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS.
e) LA DISTANCIA AL ORIGEN Y UN ÁNGULO.

a) Ecuación no perpendicular al eje "x" de una recta que pasa por dos puntos conocidos.



Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ los dos puntos cuyas coordenadas se conocen, la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos es $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, consideremos un punto cualquiera $P(x,y)$ situado sobre la misma recta, la pendiente de la recta que pasa por $P(x,y)$ y $P_1(x_1,y_1)$ es la misma "m" o sea: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$; $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, arreglando esta última expresión como sigue: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, es más práctico recordarla y aplicarla para obtener la ecuación de la recta pedida como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

1) $P_1(2,-3)$, $P_2(5,4)$

Solución

Sustituyendo las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 en la expresión $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y+3}{4+3}\ ;\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{7}$$

$$7(x-2)=3(y+3)\ ;\ 7x-14=3y+9$$

$7x-3y-23=0$ es la ecuación buscada.

2) $A(-2,-1)$, $B(4,-4)$

Solución

$$\frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B}\ ;\ \frac{x-4}{-6}=\frac{y+4}{3}\ ;\ 3x-12=-6y-24$$

$3x+6y+12=0$ es la ecuación buscada.

3) $D(-3,3)$, $E(4,2)$

Solución

$$\frac{x-x_E}{x_D-x_E}=\frac{y-y_E}{y_D-y_E}\ ;\ \frac{x-4}{-7}=\frac{y-2}{1}\ ;\ 1(x-4)=-7(y-2)$$

$$x-4=-7y+14\ ;\ 7y-14=0$$

$x-7y+10=0$ es la ecuación buscada.

4) $F(5,5)$, $G(4,-2)$

Solución

$$\frac{x-x_G}{x_F-x_G}=\frac{y-y_G}{y_F-y_G}\ ;\ \frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{7};\ 7(x-4)=1(y+2)\ ;\ 7x-28=y+2$$

$7x-y-30=0$ es la ecuación buscada.

5) $H(0,0)$, $I(3,5)$

Solución

$$\frac{x-x_I}{x_H-x_I}=\frac{y-y_I}{y_H-y_I}\ ;\ \frac{x-3}{-3}=\frac{y-5}{-5};\ -5(x-3)=-3(y-5)\ ;\ -5x+15=-3y+15$$

$5x-3y=0$ es la ecuación buscada.

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

1) $A(-2,3)$, $B(4,-1)$

2) $C(-1,1)$, $D(2,4)$

3) $P_1(-4,0)$, $P_2(2,1)$

4) $Q(1,1)$, $R(3,3)$

5) $M(-2,-4)$, $N(-1,4)$

b) Ecuación de una recta (no perpendicular al eje "x") conocidos su pendiente y un punto.

Sean "m" y $P_1(x_1, y_1)$ la pendiente y un punto conocidos de la recta, considerando un punto cualquiera $P(x, y)$ situado sobre la misma recta, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$ es la misma "m", esto es:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$, escribiéndola como $y - y_1 = m(x - x_1)$ es la ecuación buscada.

Llamada ecuación "punto –pendiente"

EJEMPLOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta conocidos su pendiente y un punto de ella.

1) $P_1(1,2)$, $m = \frac{2}{3}$

Solución

Si $y - y_1 = m(x - x_1)$, sustituyendo los valores conocidos se tiene:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \;;\; 3(y - 2) = 2(x - 1) \;;\; 3y - 6 = 2x - 2$$

$2x - 3y + 4 = 0$ es la ecuación buscada.

2) $A(-2,-3)$, $m = 1$

Solución

$$y + 3 = 1(x + 2) \;;\; y + 3 = x + 2$$
$$x - y - 1 = 0$$

3) $O(0,0)$, $m = -2$

Solución

$$y - 0 = -2(x - 0) \;;\; y = -2x$$
$$2x + y = 0$$

4) $B(2,2)$, $m = 0$

Solución

En la sección 4.9 se dijo que si la pendiente de una recta es nula, se trata de una recta paralela al eje "x" (es horizontal). En este caso, observamos que la ecuación de toda recta horizontal será de la forma $y = b$, donde el valor "b" es donde la recta interfecta al eje "y" (se llama ordenada al origen) esto indica que cualquier punto sobre una recta paralela al eje "x" (horizontal) el valor de su ordenada siempre será "b".

$$y - 2 = 0(x - 2) \; ; \; y - 2 = 0$$
$$y = 2$$

5) $C(4,-2)$, $m = -\frac{1}{2}$

Solución

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 4) \; ; \; 2(y + 2) = -1(x - 4) \; ; \; 2y + 4 = -x + 4$$
$$x + 2y = 0$$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta conocidos su pendiente y un punto de ella.

1) $P_1(-2,-1)$, $m = -\frac{3}{4}$

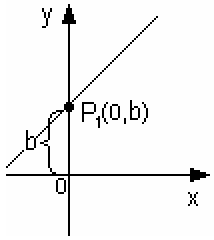
2) $P_2(5,3)$, $m = -1$

3) $P_3(0,3)$, $m = -\frac{2}{3}$

4) $P_4(4,0)$, $m = 2$

5) $P_5(-3,-2)$, $m = \frac{1}{4}$

c) Ecuación de una recta (no perpendicular al eje "x") conocidos su pendiente y la ordenada al origen.



Este caso es similar al anterior del inciso b), donde $P_1(0, y_1)$ es el punto de intersección de la recta con el eje "y" y "m" su pendiente, y_1 es la magnitud de la ordenada al origen de coordenadas y se acostumbra denotarla con la letra "b" o sea que $P_1(0, b)$.

Aplicando la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$, sustituyendo valores, simplificando y ordenando términos se tiene:

$$y - b = m(x - 0);\ y - b = mx\ ;\ y = mx + b$$

o bien $mx - y + b = 0$ que es la ecuación buscada.

Llamada "ecuación de la forma pendiente-ordenada al origen".

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener la ecuación de la recta conocidos su pendiente y la ordenada al origen.

1) $P_1(0,3),\ m = \frac{1}{4}$

Solución

Sea $y = mx + b$, sustituyendo los valores conocidos se tiene:

$$y = \frac{1}{4}x + 3 \text{ ó } \frac{1}{4}x - y + 3 = 0 \text{ ó } x - 4y + 12 = 0$$

2) $A(0,-2),\ m = 3$

Solución

$$y = mx + b\ ;\ y = 3x - 2 \text{ ó } 3x - y - 2 = 0$$

3) $B\left(0, \frac{1}{2}\right),\ m = -1$

Solución

$$y = mx + b\ ;\ y = -1x + \frac{1}{2}\ ;\ y = -x + \frac{1}{2}$$

$$\text{ó } x + y - \frac{1}{2} = 0 \text{ ó } 2x + 2y - 1 = 0$$

4) $C(0,0),\ m = 1$

Solución

$$y = mx + b\ ;\ y = 1x + 0\ ;\ y = x \text{ ó } x - y = 0$$

5) $b = \frac{5}{4},\ m = -\frac{1}{3}$

Solución

$$y = mx + b\ ;\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{4} \text{ ó } \frac{1}{3}x + y - \frac{5}{4} = 0 \text{ ó } 4x + 12y - 15 = 0$$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta conocidos su pendiente y su ordenada al origen.

1) $P_1(0,-3)$, $m=-4$

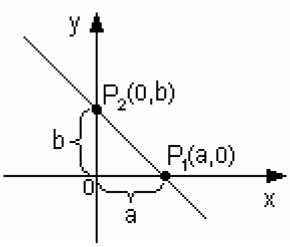
2) $b=2$, $m=\frac{4}{3}$

3) $A(0,-1)$, $m=0$

4) $b=-\frac{2}{3}$, $m=-\frac{1}{2}$

5) $B\left(0,\frac{5}{3}\right)$, $m=3$

d) <u>Ecuación de una recta conocidas las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.</u>



Este caso es similar al del inciso a) donde se conocen las coordenadas de dos puntos de la recta, en este caso, sean $P_1(a,0)$ y $P_2(0,b)$ los puntos donde la recta cruza al eje "x" y al eje "y" respectivamente. Aplicando la expresión $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ del inciso a) y sustituyendo los valores de las coordenadas de los puntos conocidos, se tiene: $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$; simplificando y ordenando términos, $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$; $-\frac{x}{a}+\frac{a}{a}=\frac{y}{b}$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ esta última es la ecuación buscada, donde "a" es la magnitud de la intersección de la recta con el eje "x" y "b" es la magnitud de la intersección de la recta con el eje "y".

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener la ecuación de la recta, conocidos las intersecciones con los ejes coordenados.

1) $P_1(3,0)$, $P_2(0,-1)$

<u>Solución</u>

Sea $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, entonces $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}=1$ ó haciendo operaciones, $x-3y-3=0$

2) $a=-2$, $b=3$

<u>Solución</u>

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1\ ;\ 3x-2y+6=0$$

3) $A(0,4)$, $B(2,0)$

Solución

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \;;\; \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \;;\; 4x+2y-8=0$$

4) $b=-5$, $a=-3$

Solución

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \;;\; \frac{x}{-3}+\frac{y}{-5}=1 \;;\; 5x+3y+15=0$$

5) $P_1(0,-1)$, $P_2(4,0)$

Solución

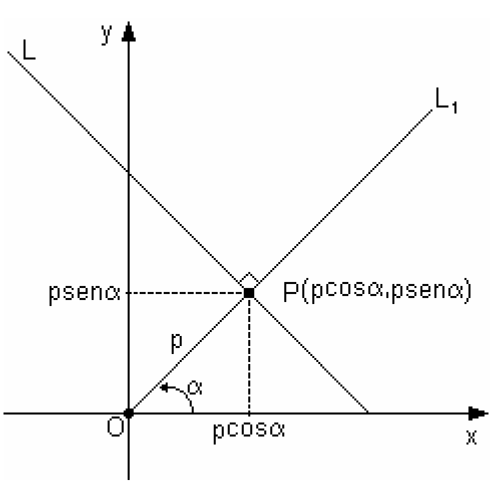
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \;;\; \frac{x}{4}+\frac{y}{-1}=1 \;;\; x-4y-4=0$$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta, conocidas sus intersecciones con los ejes coordenados.

1) $P_1(-1,0)$, $P_2(0,3)$
2) $a=3$, $b=-3$
3) $A(0,2)$, $B(4,0)$
4) $b=3$, $a=5$
5) $P_1(1,0)$, $P_2(0,-4)$

e) Ecuación de una recta conocidos la distancia al origen y un ángulo.



Consideremos una línea recta "L" cualquiera y otra recta "L_1" llamada normal perpendicular a "L" que pasa por el origen de coordenadas O, la magnitud del segmento $\overline{OP}$ es "p" y "α" es la inclinación de la recta normal "L_1", la pendiente de la recta "L_1" es $m_1=\tan\alpha$ y como la recta "L" es perpendicular a la recta "L_1", su pendiente es recíproca y de signo contrario a la pendiente de "L_1" o sea que la pendiente de la recta "L" es $-\dfrac{1}{\tan\alpha}=-\cot\alpha$, si las coordenadas del punto P son $(p\cos\alpha, psen\alpha)$, aplicando la ecuación del inciso b) $y - y_1 = m(x - x_1)$, sustituyendo valores y ordenando se tiene:

$$y - psen\alpha = -\cot\alpha(x - p\cos\alpha)\ ;\ y - psen\alpha = -\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}(x - p\cos\alpha)$$

$$y - psen\alpha = \frac{-x\cos\alpha + p\cos^2\alpha}{sen\alpha}\ ;\ sen\alpha(y - psen\alpha) = -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha$$

$$ysen\alpha - psen^2\alpha = -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha\ ;\ x\cos\alpha + ysen\alpha = p(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

como $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $x\cos\alpha + ysen\alpha = p$

$x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$ es la ecuación buscada y se le llama **ECUACIÓN NORMAL** de la recta L.

Nota: En este caso si $\alpha = 90^0$, se trata de una recta paralela al eje "x" (horizontal), si $\alpha = 0^0$, se trata de una recta (vertical) paralela al eje "y".

EJEMPLOS

En cada inciso, obtenga la ecuación de la recta en forma normal conocidos la distancia al origen "p" y su ángulo "α".

1) $p = 5$, $\alpha = 30^0$

Solución

Si $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$, sustituyendo valores se tiene:

$$x\cos 30^0 + ysen30^0 - 5 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$$

ó $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$

2) $p = 4$, $\alpha = 135^0$

Solución

Si $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$; $x\cos 135^0 + ysen135^0 - 4 = 0$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - 4 = 0$

$$-x + y - 4\sqrt{2} = 0 \text{ ó } x - y + 4\sqrt{2} = 0$$

3) $p = 1$, $\alpha = 200^0$

Solución

Si $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$; $x\cos 200^0 + ysen200^0 - 1 = 0$

$-0.94x - 0.34y - 1 = 0$ ó $0.94x + 0.34y + 1 = 0$

4) $p = 2.5$, $\alpha = 278^0$

Solución

Si $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$; $x\cos 278^0 + ysen278^0 - 2.5 = 0$

$0.14x - 0.99y - 2.5 = 0$

5) $p = 3$, $\alpha = 40^0$

Solución

Si $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$; $x\cos 40^0 + ysen40^0 - 3 = 0$

$0.77x + 0.64y - 3 = 0$

EJERCICIOS

En cada inciso, obtenga la ecuación de la recta en forma normal conocidos la distancia al origen "p" y su ángulo "α".

1) $p = 1.7$, $\alpha = 50^0$
2) $p = 3.5$, $\alpha = 120^0$
3) $p = 2$, $\alpha = 190^0$
4) $p = 4.2$, $\alpha = 270^0$
5) $p = 0$, $\alpha = 90^0$

6.4. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA: GENERAL, SIMPLIFICADA, SIMÉTRICA Y NORMAL

A la forma en que se escribe la ecuación de primer grado $Ax + By + C = 0$, se le llama **FORMA GENERAL** de la recta, donde A, B y C son cualesquiera números reales pero A y B no pueden ser simultáneamente cero.

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la ecuación queda $Ax + C = 0$, despejando "x" se tiene $x = -\frac{C}{A}$, es la ecuación de una recta vertical (donde $-\frac{C}{A} = a$ es la intersección de la recta con el eje "x"), si $a = 0$ entonces $x = 0$ es la ecuación del eje "y".

Si $A=0$, entonces $B\neq 0$ y la ecuación queda $By+C=0$, despejando "y" se tiene $y=-\frac{C}{B}$, es la ecuación de una recta horizontal (donde $-\frac{C}{B}=b$ es la intersección de la recta con el eje "y"), si $b=0$ entonces $y=0$ es la ecuación del eje "x".

Si $C=0$, entonces la ecuación queda $Ax+By=0$, despejando "y" se tiene $y=-\frac{A}{B}x$, es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas $0(0,0)$ (donde $-\frac{A}{B}=m$, es la pendiente de la recta).

En la forma general si $B\neq 0$, al despejar la "y" se tiene: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, denotando por $m=-\frac{A}{B}$ y $b=-\frac{C}{B}$ se tiene que $y=mx+b$, a esta expresión se le llama ecuación de la recta en **FORMA SIMPLIFICADA** o **FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN**.

Si la forma general $Ax+By+C=0$ con A,B y $C\neq 0$, la expresamos como $Ax+By=-C$ y dividiendo ambos miembros por $-C$ se tiene: $\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$ ó $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$ denotando por $a=-\frac{C}{A}$ y $b=-\frac{C}{B}$ se tiene $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ a esta expresión se le llama ecuación de la recta en **FORMA SIMÉTRICA**, donde el significado geométrico de "a" es la intersección de la recta con el eje "x" y "b" es la intersección de la recta con el eje "y" (ver sección 6.3 d)).

En la sección 6.3 e) de este capítulo VI, obtuvimos la ecuación de la recta en su **FORMA NORMAL**: $x\cos\alpha + ysen\alpha - p=0$ y se recomienda reestudiarla.

EJEMPLOS

En cada inciso, se da la forma general de la ecuación de una recta y se pide obtener las formas simplificada, simétrica y normal de la misma recta y dibuje su gráfica.

1) $2x-3y+1=0$

Solución

Si $m=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$; $b=-\frac{C}{B}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$ y como $y=mx+b$ es la forma simplificada, $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

Si $a=-\frac{C}{A}=-\frac{1}{2}$ y $b=\frac{1}{3}$ y como $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ es la <u>forma simétrica</u>, $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1$.

Para obtener la <u>forma normal a partir de la forma general</u>, se debe hacer el siguiente análisis:

Si la ecuación de la recta en forma general $Ax+By+C=0$ ●●●(1) y la ecuación en forma normal $x\cos\alpha+ysen\alpha-p=0$ ●●●(2) determinan la misma recta, sus coeficientes deben ser proporcionales, lo cual significa que multiplicando todos los términos de la ecuación (1) por un factor de proporcionalidad "k", se tiene que:

$kAx+kBy+kC=(\cos\alpha)x+(sen\alpha)y-p$

donde: $kA=\cos\alpha$ ●●●(3)

$kB=sen\alpha$ ●●●(4)

$kC=-p$ ●●●(5)

Como nuestro problema es determinar el valor de "k", elevamos al cuadrado ambos miembros de (3) y (4) y sumándolos miembro a miembro tenemos:

$k^2A^2+k^2B^2=\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$

factorizando $k^2(A^2+B^2)=1$ y despejando "k":

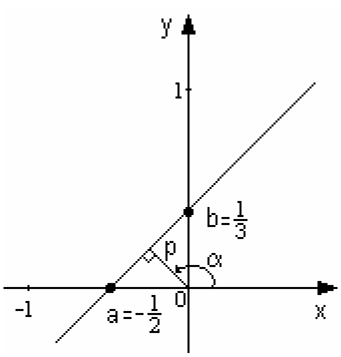
(6)●●● $k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; con $A^2+B^2\neq 0$.

Luego entonces, la ecuación de la recta en forma general $Ax+By+C=0$ tiene por ecuación en la forma normal:

(7)●●● $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$; $A^2+B^2\neq 0$

Pero surge la pregunta ¿qué signo se debe usar en el radical? (al comparar (7) con (2)), la respuesta es la siguiente, "se requiere que $p\geq 0$", por tanto:

i) Si $C\neq 0$, el signo del radical se toma contrario al de "C".
ii) Si $C=0$ y $B\neq 0$, el radical y "B" tienen el mismo signo.
iii) Si $C=B=0$, el radical y "A " tienen el mismo signo.

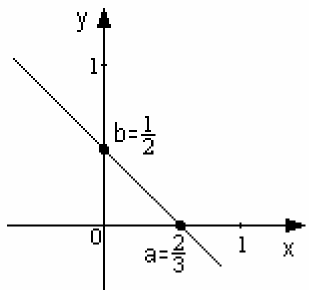


Ahora sí, continuando con el ejemplo, si la ecuación general es $2x-3y+1=0$, como "C" es positivo, el radical debe ser de signo contrario, entonces: $k=\frac{1}{-\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{13}}$ y la ecuación en <u>forma normal</u> es: $-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$

donde $\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=123.69^0$; $p=\frac{1}{\sqrt{13}}\approx 0.28$

2) $3x+4y-2=0$

Solución



Si $m=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{4}$; $b=-\dfrac{C}{B}=-\dfrac{2}{-4}=\dfrac{1}{2}$; $a=-\dfrac{C}{A}=-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{2}{3}$

entonces $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$ es la forma simplificada.

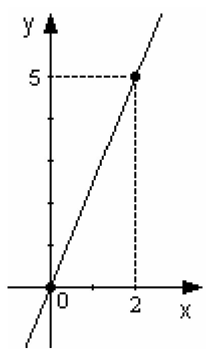
$y=\dfrac{x}{\frac{2}{3}}+\dfrac{y}{\frac{1}{2}}=1$ es la forma simétrica.

Como "C" es negativo $k=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{1}{5}=0$ es la forma normal.

3) $5x-2y=0$

Solución



Si $m=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}$; $b=-\dfrac{C}{B}=-\dfrac{0}{-2}=0$; $a=-\dfrac{C}{A}=-\dfrac{0}{5}=0$

entones $y=\dfrac{5}{2}x$ es la forma simplificada.

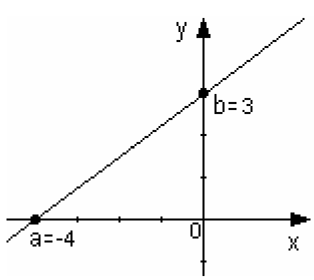
No existe forma simétrica porque tanto $a=0$ como $b=0$ y no se puede dividir entre cero.

Como "$C=0$" y $B\neq 0$; $k=\dfrac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{(5)^2+(-2)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{29}}$

$-\dfrac{5}{\sqrt{29}}+\dfrac{2}{\sqrt{29}}=0$ es la forma normal.

4) $\dfrac{5}{4}x-\dfrac{5}{3}y+5=0$

Solución



Si la ecuación dada, la multiplicamos en ambos miembros por 12 se tiene $15x-20y+60=0$, ecuación que es equivalente a la original, donde: $m=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{15}{-20}=\dfrac{3}{4}$; $b=-\dfrac{C}{B}=-\dfrac{60}{-20}=3$; $a=-\dfrac{C}{A}=-\dfrac{60}{15}=-4$

entonces $y=\dfrac{3}{4}x+3$ es la forma simplificada.

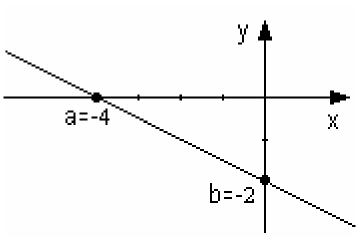
$\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{3}=1$ es la forma simétrica.

Como $C>0$, $k=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{(15)^2+(-20)^2}}=-\frac{1}{25}$

$-\frac{15}{25}x+\frac{20}{25}y-\frac{60}{25}=0$ simplificando: $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0$ es la forma normal.

5) $x+2y+4=0$

Solución



Si $m=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$; $b=-\frac{C}{B}=-\frac{4}{2}=-2$; $a=-\frac{C}{A}=-\frac{4}{1}=-4$

$y=-\frac{1}{2}x-2$ es la forma simplificada.

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}=1$ es la forma simétrica.

Como $C>0$, $k=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ entonces:

$-\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$ es la forma normal.

EJERCICIOS

En cada inciso, dada la forma general de la ecuación de una recta, se piden las formas simplificada, simétrica y normal de la recta dada y dibuje su gráfica.

1) $-3x+2y-1=0$
2) $4x-3y+2=0$
3) $2x+5y=0$
4) $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$
5) $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1=0$

6.5. ECUACIONES DE: LAS MEDIANAS, MEDIATRICES Y ALTURAS DE UN TRIÁNGULO, SUS PUNTOS DE INTERSECCIÓN Y RECTA DE EULER

Iniciemos esta sección definiendo la geometría de cada uno de los conceptos del tema en cuestión:

- Las medianas son rectas que parten de cada vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto.
  Las 3 medianas de un triángulo se intersectan en un mismo punto "G" llamado "centro de gravedad" (baricentro o gravicentro).

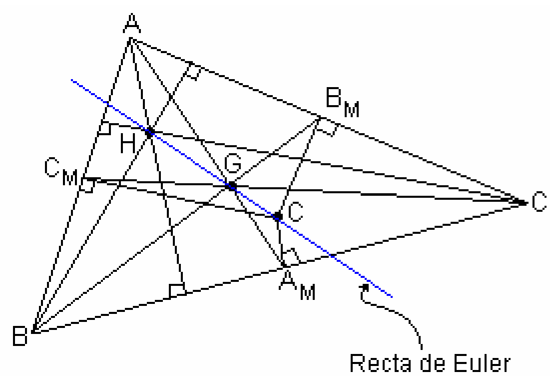
- <u>La mediatriz</u> de cada lado del triángulo es la recta que parte del punto medio de cada lado y es perpendicular a este.

  Las 3 mediatrices de un triángulo se intersectan en un mismo punto "C" llamado "circuncentro" (centro de un circulo que circunscribe al triángulo).

- <u>Las alturas</u> de un triángulo son las rectas que parten de cada vértice y son perpendiculares a su lado opuesto.

  Las 3 alturas de un triángulo se intersectan en un mismo punto "H" llamado "ortocentro".

- Los 3 puntos G, C y H se localizan sobre la misma recta, llamada "recta de Euler".



$$\left.\begin{array}{r} AA_M \\ BB_M \\ CC_M \end{array}\right\} \text{Medianas}$$

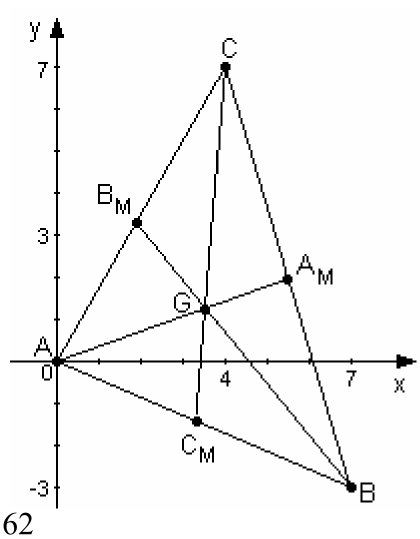
$$\left.\begin{array}{r} A_M C \\ B_M C \\ C_M C \end{array}\right\} \text{Mediatrices}$$

$$\left.\begin{array}{r} AH \\ BH \\ CH \end{array}\right\} \text{Alturas}$$

EJEMPLOS

Los puntos $A(0,0)$, $B(7,-3)$ y $C(4,7)$ son los vértices de un triángulo, hallar lo que se pide en cada inciso:

1) Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección "G", haga un dibujo del problema.



Las coordenadas de los puntos medios de cada lado del triángulo:

$$A_M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{7+4}{2},\frac{-3+7}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},2\right)$$

$$B_M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+7}{2}\right)=\left(2,\frac{7}{2}\right)$$

$$C_M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+7}{2},\frac{0-3}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

Ecuaciones de las medianas: con la expresión $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ de la sección 6.3 a)

Mediana AA_M: $\frac{x-0}{\frac{11}{2}-0}=\frac{y-0}{2-0}$; $\frac{x}{\frac{11}{2}}=\frac{y}{2}$; $4x=11y$; $\boxed{4x-11y=0}$

Mediana BB_M: $\frac{x-7}{2-7}=\frac{y+3}{\frac{7}{2}+3}$; $\frac{x-7}{-5}=\frac{2y+6}{13}$; $13x-91=-10y-30$; $\boxed{13x+10y-61=0}$

Mediana CC_M: $\frac{x-4}{\frac{7}{2}-4}=\frac{y-7}{-\frac{3}{2}-7}$; $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-7}{-\frac{17}{2}}$; $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-7}{-17}$; $\boxed{17x-y-61=0}$

Para obtener las coordenadas del punto de intersección "G" de las 3 medianas, elegimos dos cualesquiera de las ecuaciones de las medianas y las resolvemos como un sistema de ecuaciones simultáneas por cualquiera de los métodos de solución:

Sean AA_M: $4x-11y=0$
BB_M: $13x+10y-61=0$

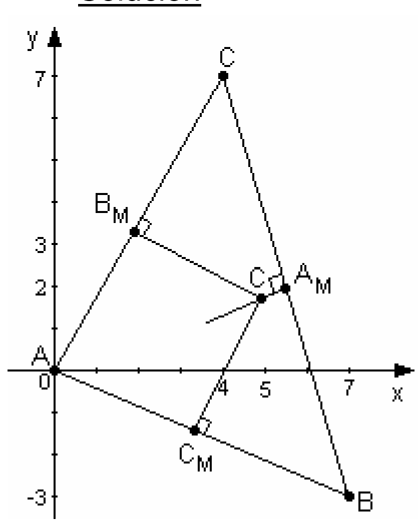
Por el método de sustitución, de AA_M despejamos la $y=\frac{4}{11}x$ y la sustituimos en la ecuación BB_M, $13x+10\left(\frac{4}{11}x\right)-61=0$ y resolvemos para x: $143x+40x-671=0$

$$183x=671 \ ; \ x=\frac{11}{3}$$

sustituyendo este valor en $y=\frac{4}{11}\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{4}{3}$, por lo tanto $\boxed{G\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)}$.

2) Las ecuaciones de las mediatrices y las coordenadas de su punto de intersección "C", haga un dibujo del problema.

Solución



Las coordenadas de los puntos medios de cada lado ya se calcularon en el inciso anterior: $A_M\left(\frac{11}{2},2\right)$, $B_M\left(2,\frac{7}{2}\right)$, $C_M\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Las pendientes de cada lado del triángulo son:

lado AB: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3-0}{7-0}=-\frac{3}{7}$

$$\text{lado } BC: \; m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7+3}{4-7} = -\frac{10}{3}$$

$$\text{lado } CA: \; m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0-7}{0-4} = \frac{7}{4}$$

Ecuaciones de las mediatrices.

Mediatriz $A_M C$: su pendiente es recíproca y de signo contrario a la pendiente del lado BC, o sea $m = \frac{3}{10}$ y pasa por el punto $A_M\left(\frac{11}{2}, 2\right)$, aplicando la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$ de la sección 6.3 b) se tiene: $y - 2 = \frac{3}{10}\left(x - \frac{11}{2}\right)$; $y = \frac{3}{10}x - \frac{33}{20} + \frac{40}{20}$

$$\boxed{y = \frac{3}{10}x + \frac{7}{20}}$$

Mediatriz $B_M C$: $m = -\frac{4}{7}$, $B_M\left(2, \frac{7}{2}\right)$

$y - \frac{7}{2} = -\frac{4}{7}(x - 2)$; $y = -\frac{4}{7}x + \frac{8}{7} + \frac{7}{2}$

$$\boxed{y = -\frac{4}{7}x + \frac{65}{14}}$$

Mediatriz $C_M C$: $m = \frac{7}{3}$, $C_M\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$y + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$; $y = \frac{7}{3}x - \frac{49}{6} - \frac{3}{2}$

$$\boxed{y = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}}$$

Coordenadas del punto de intersección "C" de las 3 mediatrices.

Sean $A_M C$: $y = \frac{3}{10}x + \frac{7}{20}$

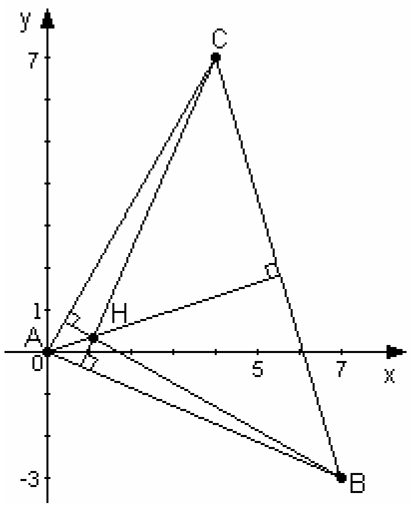
$C_M C$: $y = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$

Por el método de igualación $\frac{3}{10}x + \frac{7}{20} = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$; $\frac{3}{10}x - \frac{7}{3}x = -\frac{29}{3} - \frac{7}{20}$; $\frac{9x - 70x}{30} = \frac{-580 - 21}{60}$

$18x - 140x = -601$; $x = \frac{-601}{-122} = \frac{601}{122}$; $y = \frac{7}{3}\left(\frac{610}{122}\right) - \frac{29}{3}$; $y = \frac{223}{122}$ $\therefore \boxed{C\left(\frac{601}{122}, \frac{223}{122}\right)}$

3) Las ecuaciones de las alturas y las coordenadas de su punto de intersección “H”, haga un dibujo del problema.

Solución



Ecuaciones de las alturas.

Altura AH: es perpendicular al lado BC, su pendiente es $m=\frac{3}{10}$ y pasa por el punto $A(0,0)$, si $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-0=\frac{3}{10}(x-0)\ ;\ \boxed{y=\frac{3}{10}x}$$

Altura BH: $m=-\frac{4}{7}$, $B(7,-3)$; $y+3=-\frac{4}{7}(x-7)$

$$y=-\frac{4}{7}x+4-3\ ;\ \boxed{y=-\frac{4}{7}x+1}$$

Altura CH: $m=\frac{7}{3}$, $C(4,7)$; $y-7=\frac{7}{3}(x-4)$; $y=\frac{7}{3}x-\frac{28}{3}+7$; $\boxed{y=\frac{7}{3}x-\frac{7}{3}}$

Coordenadas del punto de intersección “H” de las 3 alturas.

Sean AH: $y=\frac{3}{10}x$

BH: $y=-\frac{4}{7}x+1$

Por el método de igualación: $\frac{3}{10}x=-\frac{4}{7}x+1$; $\frac{3}{10}x+\frac{4}{7}x=1$; $21x+40x=70$; $61x=70$; $x=\frac{70}{61}$

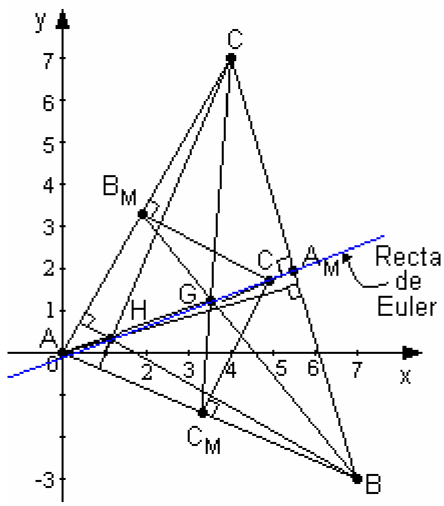
Sustituyendo en $y=\frac{3}{10}\left(\frac{70}{61}\right)=\frac{21}{60}$ $\therefore$ $\boxed{H\left(\frac{70}{61},\frac{21}{61}\right)}$

4) Obtenga la ecuación de Euler.

Solución

Ecuación de Euler.

Sean las coordenadas de $G\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{601}{122},\frac{223}{122}\right)$ y $H\left(\frac{70}{61},\frac{21}{61}\right)$; si la pendiente de la recta que pasa por los puntos H y G es la misma que la que pasa por los puntos H y C, entonces los 3 puntos G,H y C están sobre la misma recta:



$$m_{HG}=\frac{y_G-y_H}{x_G-x_H}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{21}{61}}{\frac{11}{3}-\frac{70}{61}}=\frac{181}{461}$$

$$m_{HC}=\frac{y_C-y_H}{x_C-x_H}=\frac{\frac{223}{122}-\frac{21}{61}}{\frac{601}{122}-\frac{70}{61}}=\frac{181}{461}$$

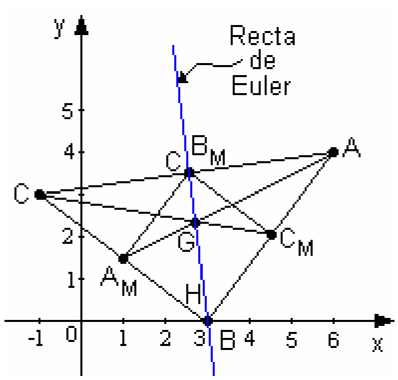
Eligiendo cualquiera de los 3 puntos, por ejemplo $G\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$

y como $m_{HC}=\frac{181}{461}$ se tiene

$$y-\frac{4}{3}=\frac{181}{461}\left(x-\frac{11}{3}\right)\ ;\ y=\frac{181}{461}x-\frac{181}{461}\left(\frac{11}{3}\right)+\frac{4}{3}\ ;\ \boxed{y=\frac{181}{461}x-\frac{49}{461}}$$

5) Los vértices de un triángulo son $A(6,4)$, $B(3,0)$ y $C(-1,3)$, obtener las ecuaciones de las medianas, las mediatrices, las alturas y las coordenadas de los puntos G,C y H, así como la ecuación de Euler y hacer un dibujo del problema.

Solución



Coordenadas de los puntos medios de cada lado:

$$A_M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(1,\frac{3}{2}\right)$$

$$B_M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$C_M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},2\right)$$

Pendiente de cada lado del triángulo:

Lado AB: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-4}{3-6}=\frac{4}{3}$

Lado BC: $m=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{3-0}{-1-3}=-\frac{3}{4}$

Lado CA: $m=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{4-3}{6+1}=\frac{1}{7}$

Ecuaciones de las medianas:

Mediana AA_M : $\frac{x-6}{1-6}=\frac{y-4}{\frac{3}{2}-4}$; $\frac{x-6}{-5}=\frac{2y-8}{-5}$; $\boxed{x-2y+2=0}$

Mediana BB_M : $\frac{x-3}{\frac{5}{2}-3}=\frac{y-0}{\frac{7}{2}-0}$; $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{7}$; $\boxed{7x+y-21=0}$

Mediana CC_M : $\frac{x+1}{\frac{9}{2}+1}=\frac{y-3}{2-3}$; $\frac{2x+2}{11}=\frac{y-3}{-1}$; $\boxed{2x+11y-31=0}$

Coordenadas del centro de gravedad "G".

Sean AA_M : $x-2y+2=0$
BB_M : $7x+y-21=0$

de AA_M , $x=2y-2$; sustituyendo en BB_M se tiene: $7(2y-2)+y-21=0$; $14y-14+y-21=0$

$y=\frac{7}{3}$ sustituyendo en $x=2\left(\frac{7}{3}\right)-2$; $x=\frac{8}{3}$ $\therefore$ $\boxed{G\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)}$

Ecuaciones de las mediatrices.

Mediatriz A_MC : $m=\frac{4}{3}$ y pasa por $A_M\left(1,\frac{3}{2}\right)$

$y-\frac{3}{2}=\frac{4}{3}(x-1)$; $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}$; $\boxed{y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}}$

Mediatriz B_MC : $m=-7$ y pasa por $B_M\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

$y-\frac{7}{2}=-7\left(x-\frac{5}{2}\right)$; $y=-7x+\frac{35}{2}+\frac{7}{2}$; $\boxed{y=-7x+21}$

Mediatriz C_MC : $m=-\frac{3}{4}$ y pasa por $C_M\left(\frac{9}{2},2\right)$

$y-2=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)$; $y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{8}+\frac{16}{8}$; $\boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{43}{8}}$

Coordenadas del circuncentro "C":

Sean: A_MC : $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}$
B_MC : $y=-7x+21$

Por igualación $\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}=-7x+21$; $\frac{4}{3}x+7x=21-\frac{1}{6}$; $\frac{25}{3}x=\frac{125}{6}$; $x=\frac{5}{2}$; sustituyendo en $y=-7\left(\frac{5}{2}\right)+21$; $y=\frac{-35+42}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore$ $\boxed{C\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)}$

Ecuaciones de las alturas.

Altura AH: $m=\frac{4}{3}$ y pasa por $A(6,4)$

$$y-4=\frac{4}{3}(x-6)\ ;\ y=\frac{4}{3}x-8+4\ ,\ \boxed{y=\frac{4}{3}x-4}$$

Altura BH: $m=-7$ y pasa por $B(3,0)$

$$y-0=-7(x-3)\ ;\ \boxed{y=-7x+21}$$

Altura CH: $m=-\frac{3}{4}$ y pasa por $A(-1,3)$

$$y-3=-\frac{3}{4}(x+1)\ ;\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}+3\ ,\ \boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}}$$

Coordenadas del ortocentro "H".

Sean AH: $y=\frac{4}{3}x-4$

BH: $y=-7x+21$

Por el método de igualación $\frac{4}{3}x-4=-7x+21$; $\frac{4}{3}x+7x=21+4$; $\frac{25}{3}x=25$; $x=3$ sustituyendo en $y=-7(3)+21$; $y=0$ $\therefore\boxed{H(3,0)}$

Ecuación de Euler.

Sean $G\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)$, $C\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ y $H(3,0)$

$$m_{GC}=\frac{y_C-y_G}{x_C-x_G}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}-\frac{8}{3}}=-7$$

$$m_{GH}=\frac{y_H-y_G}{x_H-x_G}=\frac{0-\frac{7}{3}}{3-\frac{8}{3}}=-7$$

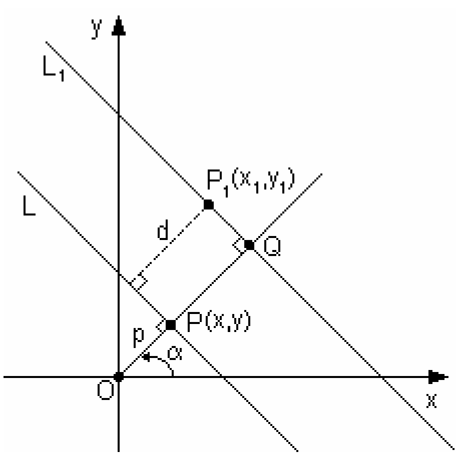
Con $H(3,0)$ y $m=-7$; $y-0=-7(x-3)$; $\boxed{y=-7x+21}$

EJERCICIOS

Los vértices de un triángulo son $A(-3,-3)$, $B(3,3)$ y $C(-4,4)$ se pide:

1) Las ecuaciones de las medianas, las coordenadas de "G".
2) Las ecuaciones de las mediatrices, las coordenadas de "C".
3) Las ecuaciones de las alturas, las coordenadas de "H".
4) La ecuación de Euler.
5) Con los puntos $A(-1,0)$, $B(3,0)$ y $C(1,2\sqrt{3})$ como vértices de un triángulo, se pide las ecuaciones de las medianas, las mediatrices, las alturas, las coordenadas de los puntos G,C y H, la ecuación de Euler y hacer un dibujo del problema.

6.6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA



Este problema consiste en obtener una fórmula que nos permita calcular la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta "L" (llamemos con la letra "d" esta distancia).

Una forma de resolver este problema es la siguiente: hagamos pasar por el punto $P_1(x_1, y_1)$ una recta "L_1" paralela a la recta "L" y recordando que la <u>forma normal</u> de la ecuación de la recta "L" es $x\cos\alpha + y sen\alpha - p = 0 \bullet\bullet\bullet (1)$, apoyándonos con la figura, observamos que la magnitud $OQ = p + d$ y puede considerarse como una nueva "p" para la recta "L_1", con el mismo ángulo "α" y que su forma normal es: $x_1\cos\alpha + y_1 sen\alpha - (p + d) = 0$, despejando la "$d$" se tiene $d = x_1\cos\alpha + y_1 sen\alpha - p$, que es la distancia dirigida de P_1 a L y que como se observa, se obtiene con solo sustituir las coordenadas del punto $P_1(x_1, y_1)$ en la ecuación (1). Esta distancia "d" <u>será positiva</u> si la recta "L" se localiza entre el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen de coordenadas y <u>será negativa</u> si el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen de coordenadas se localiza de un mismo lado de la recta "L".

Como generalmente la ecuación de la recta "L" se da en forma general $Ax + By + C = 0$, es necesario convertirla a la forma normal (ver 6.4 d)), quedando la distancia "d" como sigue:

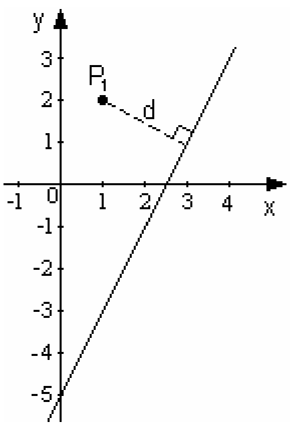
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto $P_1(x_1, y_1)$ y eligiendo el signo del radical contrario al de "C".

EJEMPLOS

1) Obtener la distancia del punto $P_1(1,2)$ a la recta $y = 2x - 5$.

Solución



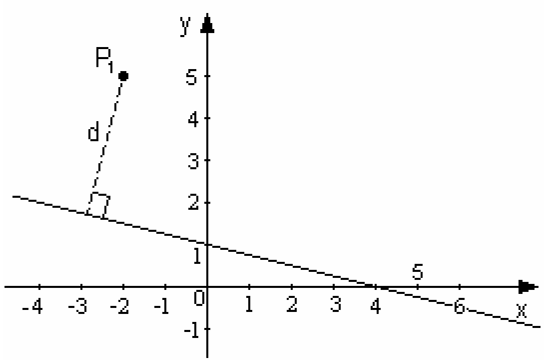
Pasando la recta $y = 2x - 5$ a la forma general $2x - y - 5 = 0$, sustituimos las coordenadas del punto $P_1(1,2)$ en la expresión:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2x - y - 5}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2(1) - (2) - 5}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

$d = -\sqrt{5}$, el signo negativo es porque el punto P_1 y el origen se localizan del mismo lado de la recta.

2) Hallar la distancia del punto $P_1(-2,5)$ a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{1} = 1$.

Solución



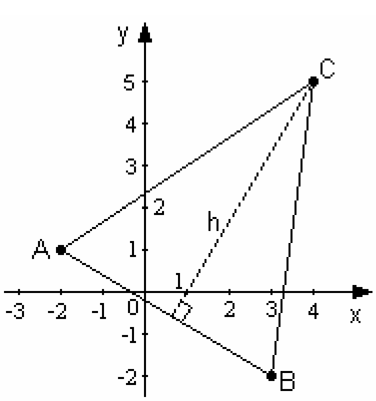
Pasando a la forma general la ecuación de la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{1} = 1$, $x + 4y - 4 = 0$ y sustituyendo $P_1(-2,5)$ en:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{x + 4y - 4}{\sqrt{(1)^2 + (4)^2}} = \frac{(-2) + 4(5) - 4}{\sqrt{17}} = \frac{14}{\sqrt{17}}$$

$d = \frac{14}{\sqrt{17}}$, el signo positivo es porque P_1 y el origen se localizan en ambos lados de la recta.

3) Los vértices de un triángulo $A(-2,1)$, $B(3,-2)$ y $C(4,5)$, hallar la magnitud de la altura "h" del vértice "C" sobre el lado AB.

Solución



Obtenemos la ecuación en forma general del lado AB:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1+2}{-2-3} = -\frac{3}{5}$$ y con el punto $A(-2,1)$ se tiene:

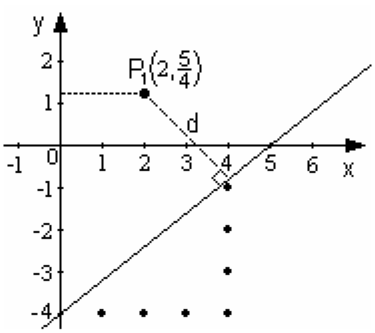
$y - 1 = -\frac{3}{5}(x + 2)$; $5y - 5 = -3x - 6$; $3x + 5y + 1 = 0$, sustituyendo las coordenadas del punto $C(4,5)$ en la expresión:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{3x + 5y + 1}{-\sqrt{(3)^2 + (5)^2}} = \frac{3(4) + 5(5) + 1}{-\sqrt{34}} = -\frac{38}{\sqrt{34}}$$

como $d = h$; $h = \left| -\frac{38}{\sqrt{34}} \right| = \frac{38}{\sqrt{34}} \approx 6.5$

4) La distancia "d" del punto $P_1(2,k)$ a la recta $L_1 : 3x - 4y - 16 = 0$ es -3, hallar el valor de "k".

<u>Solución</u>



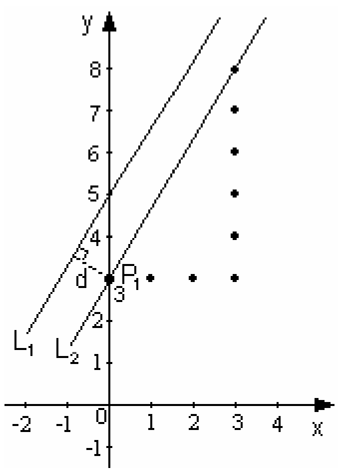
Sustituyendo valores en la expresión $d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$

$-3 = \frac{3(2) - 4(k) - 16}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$ despejando "k" ; $k = \frac{6 - 16 + 15}{4} = \frac{5}{4}$

entonces $P_1\left(2, \frac{5}{4}\right)$. El signo -3 indica que el punto P_1 y el origen se localizan del mismo lado respecto a la recta L_1.

5) Hallar la distancia "d" entre las rectas paralelas $L_1 : 5x - 3y + 15 = 0$ y $L_2 : 5x - 3y + 9 = 0$.

<u>Solución</u>



Una forma puede ser la siguiente:
Obtenemos un punto arbitrario de la recta L_2: sea $x = 0$; $5(0) - 3y + 9 = 0$; $y = \frac{9}{3} = 3$ lo llamamos $P_1(0,3)$ y sustituimos sus coordenadas en la expresión:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{5x - 3y + 15}{-\sqrt{(5)^2 + (-3)^2}} = \frac{5(0) - 3(3) + 15}{-\sqrt{34}} = -\frac{6}{\sqrt{34}}$$

$$d = -\frac{6}{\sqrt{34}} \approx -1.03$$

EJERCICIOS

1) Hallar la distancia del punto $P_1(4,1)$ a la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$.

2) Hallar la distancia del punto $P_1(3,5)$ a la recta $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$.

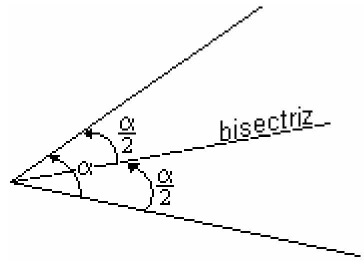
3) Hallar la distancia del punto $P_1(-2,1)$ a la recta $\frac{1}{2}x + 2y + 4 = 0$.

4) Hallar la distancia "d" entre las rectas paralelas $L_1 : 2x - y + 3 = 0$ y $L_2 : 4x - 2y - 2 = 0$.

5) Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta $L_1 : 3x - 4y - 6 = 0$ con $d = 2$ (positiva).

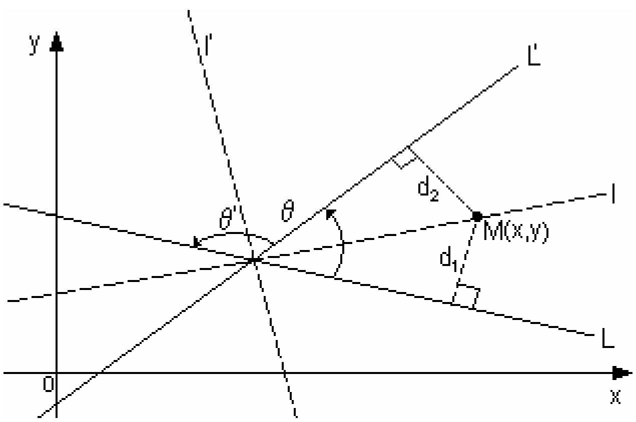
6.7. ECUACIÓN DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO Y SU PUNTO DE INTERSECCIÓN “I” (INCENTRO)

Como una aplicación más de la forma normal de la ecuación de una recta, se muestra cómo puede obtenerse la ecuación de una bisectriz. Por geometría elemental, se puede decir que una bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales:



Por definición se tiene que: “La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo”.

Consideremos dos rectas:



$(L)\ldots\ Ax+By+C=0$ y
$(L')\ldots\ A'x+B'y+C'=0$
que se cruzan en un punto formando dos ángulos suplementarios θ y $\theta'=180^0-\theta$, suponemos que las rectas “l” y “l'” son las bisectrices de θ y θ' respectivamente, consideremos un punto cualquiera $M(x,y)$ sobre la bisectriz “l” y según la definición, la distancia del punto M a la recta L (d_1) debe ser igual a la distancia de M a L' (d_2), o sea que $d_1=d_2$, aplicando el concepto de distancia de un punto a una recta, se tiene que:

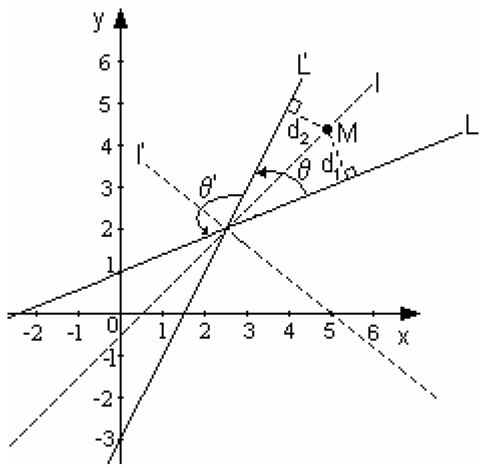
$$d_1=\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A'x+B'y+C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}=d_2 \quad \bullet\bullet\bullet(1)$$

Esta última expresión, proporciona la ecuación de la bisectriz “l” del ángulo θ y para obtener la bisectriz del ángulo suplementario θ', simplemente se cambia el signo de uno cualquiera de los dos miembros de la expresión (1) y se debe cumplir que “las bisectrices de los ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí”.

EJEMPLOS

1) Obtener las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas $(L)\ldots\ x-2y+2=0$ y $(L')\ldots\ 2x-y-3=0$

Solución



Suponemos un punto "M" cualquiera sobre la bisectriz "l", entonces las distancias de M a L (d_1) y la de M a L' (d_2) son:

$$d_1 = \frac{x-2y+2}{-\sqrt{(1)^2+(-2)^2}} = \frac{x-2y+2}{-\sqrt{5}}$$

$$d_2 = \frac{2x-y-3}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}} = \frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}$$

En las dos distancias d_1 y d_2, el punto M y el origen de coordenadas se localizan en ambos lados respecto a cada recta L y L', por lo tanto son de signo positivo y como $d_1 = d_2$ se tiene:

$(a)\ldots\ \frac{x-2y+2}{-\sqrt{5}} = \frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}$ simplificando y ordenando: $-x+2y-2 = 2x-y-3$

$\boxed{3x-3y-1=0}$ es la ecuación de la bisectriz "l".

Para obtener la bisectriz l', cambiamos el signo a uno de los dos miembros de la expresión (a):

Sea $-\left(\frac{x-2y+2}{-\sqrt{5}}\right) = \frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}$ y simplificando se tiene:

$\boxed{x+y-5=0}$ es la ecuación de la bisectriz l'.

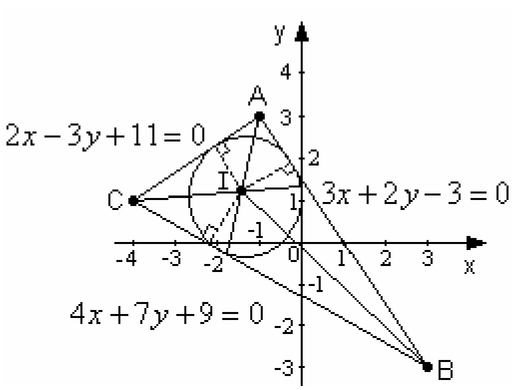
despejando de la bisectriz "l" a: $y = x - \frac{1}{3}$ y de la bisectriz l' $y=-x+5$, se observa que las pendientes son recíprocas y de signo contrario: $m_l = 1$; $m_{l'} = -1$, por lo tanto sí son dos rectas perpendiculares entre sí.

Los vértices de un triángulo son $A(-1,3)$, $B(3,-3)$ y $C(-4,1)$, se pide:

2) Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores.
3) Las coordenadas del incentro (I).
4) Demuestre que el incentro equidista de los tres lados del triángulo.

Solución

Las ecuaciones de los lados del triángulo son:



Lado AB: $\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-3}{-3-3}$; $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}$; $-6x-6=4y-12$

$$6x+4y-6=0 \; ; \boxed{3x+2y-3=0}$$

Lado BC: $\frac{x-3}{-4-3}=\frac{y+3}{1+3}$; $\frac{x-3}{-7}=\frac{y+3}{4}$; $4x-12=-7y-21$

$$\boxed{4x+7y+9=0}$$

Lado CA: $\frac{x+4}{-1+4}=\frac{y-1}{3-1}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{2}$; $2x+8=3y-3$

$$\boxed{2x-3y+11=0}$$

2) Ecuaciones de las bisectrices:

Del ángulo en A: $\frac{3x+2y-3}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}=\frac{2x-3y+11}{-\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}$; $\frac{3x+2y-3}{\sqrt{13}}=\frac{2x-3y+11}{-\sqrt{13}}$

$-(3x+2y-3)=2x-3y+11$; $\boxed{5x-y+8=0}$

Del ángulo en B: $\frac{3x+2y-3}{\sqrt{13}}=\frac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}}$; $-\sqrt{5}(3x+2y-3)=4x+7y+9$

$$\boxed{\left(4+3\sqrt{5}\right)x+\left(7+2\sqrt{5}\right)y-3\sqrt{5}+9=0}$$

Del ángulo en C: $\frac{2x-3y+11}{-\sqrt{13}}=\frac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}}$; $\sqrt{5}(2x-3y+11)=4x+7y+9$

$$\boxed{\left(2\sqrt{5}-4\right)x+\left(3\sqrt{5}+7\right)y+11\sqrt{5}-9=0}$$

3) Coordenadas del incentro (I)

Resolviendo como un sistema de ecuaciones a 2 cualesquiera de las bisectrices, sean:

$$5x-y+8=0$$
$$\left(4+3\sqrt{5}\right)x+\left(7+2\sqrt{5}\right)y-3\sqrt{5}+9=0$$

despejando de la primera $y=5x+8$ y sustituyendo en la segunda:

$\left(4+3\sqrt{5}\right)x+\left(7+2\sqrt{5}\right)(5x+8)-3\sqrt{5}+9=0$; $4x+3\sqrt{5}x+35x+56+10\sqrt{5}x+16\sqrt{5}-3\sqrt{5}+9=0$

$\left(13\sqrt{5}+39\right)x=-13\sqrt{5}-65$; $x=\dfrac{-13\sqrt{5}-65}{13\sqrt{5}+39}\approx -1.4$

sustituyendo este valor en $y=5\left(\dfrac{-13\sqrt{5}-65}{13\sqrt{5}+39}\right)+8\approx 1.1$

$$\approx I\left(-1.4,1.1\right)$$

4) ¿El incentro equidista de los 3 lados del triángulo?

Calculando la distancia del punto $I\left(-1.4,1.1\right)$ a cada uno de los lados del triángulo se tiene:

Con el lado AB: $\dfrac{3x+2y-3}{\sqrt{12}}=\dfrac{3\left(-1.4\right)+2\left(1.1\right)-3}{\sqrt{12}}\approx 1.4$

Con el lado BC: $\dfrac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}}=\dfrac{4\left(-1.4\right)+7\left(1.1\right)+9}{-\sqrt{65}}\approx 1.4$

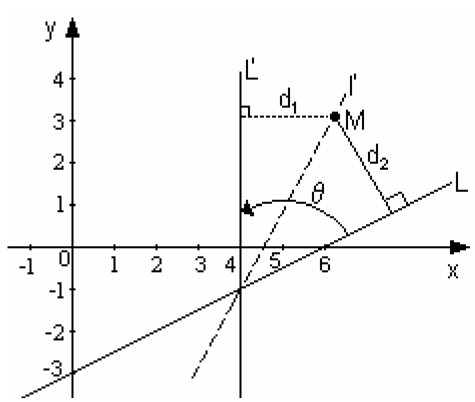
Con el lado CA: $\dfrac{2x-3y+11}{-\sqrt{13}}=\dfrac{2\left(-1.4\right)-3\left(1.1\right)+11}{-\sqrt{13}}\approx 1.4$

Por lo tanto, el punto $I\left(-1.4,1.1\right)$ equidista de los 3 lados del triángulo y es el centro del círculo inscrito al triángulo.

5) Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ formado por las rectas

$\left(L\right)\ldots\ x-2y-6=0$ y $\left(L'\right)\ldots\ x-4=0$.

Solución



Suponiendo que el punto M se localiza sobre la bisectriz del ángulo agudo θ, se observa que el punto "M" y el origen "O" están del mismo lado de la recta L y el punto "M" y el origen "O" se localizan en ambos lados de la recta L' por lo que d_1 es positivo y d_2 negativo como sigue:

$\dfrac{x-2y-6}{\sqrt{5}}=-\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{1}}\right)$; $x-2y-6=-\sqrt{5}\left(x-4\right)$

$x-2y-6=-\sqrt{5}x+4\sqrt{5}$

$\boxed{\left(1+\sqrt{5}\right)x-2y-\left(6+4\sqrt{5}\right)=0}$ es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ.

EJERCICIOS

1) Obtener las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas que unen los puntos $A(0,4)$, $B(4,0)$ y $C(0,7)$, $D(1,0)$.

2) Obtener la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ formado por las rectas $(L_1)\ldots\ \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ y $(L_2)\ldots\ y=7x+7$.

3) La recta (L_1) pasa por el punto $A(1,-1)$ y tiene pendiente $m_1=\frac{3}{4}$ y la recta (L_2) pasa por el punto $B(-1,-6)$ y tiene pendiente $m_2=\frac{4}{3}$, se cruzan formando un ángulo agudo θ, hallar la ecuación de su bisectriz.

Los vértices de un triángulo son $A\left(\frac{5}{2},-\frac{15}{2}\right)$, $B(5,0)$ y $C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, se pide:

4) Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores.

5) Hallar las coordenadas del incentro (I).

6.8. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Para resolver este problema, proponemos 2 formas de hacerlo:

1ª Forma. Aplicando la forma normal de la recta , suponemos dos rectas $(L)\ldots$ $x\cos\alpha+ysen\alpha-p=0$ y $(L')\ldots\ x\cos\alpha+ysen\alpha-p'=0$ paralelas entre sí, donde p y p' son las distancias del origen a cada recta y la distancia "d" entre las dos rectas es $d=|p-p'|$ si el origen de coordenadas se localiza del mismo lado de las rectas y $d=p+p'$, si el origen se localiza entre las dos rectas.

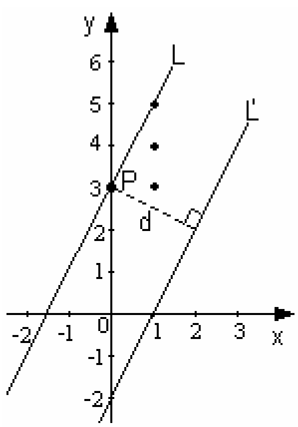
2ª Forma. Se obtiene un punto $P_1(x_1,y_1)$ cualquiera sobre alguna de las dos rectas y se calcula la distancia de éste punto a la otra recta y esta será la distancia entre las dos rectas.

EJEMPLOS

En cada inciso, se pide calcular la distancia entre las dos rectas paralelas que se dan.

1) $(L)\ldots\ 2x-y+3=0$; $(L')\ldots\ 6x-3y-6=0$

Solución



1ª Forma.

Recordar que cuando la recta se da en la forma general, $p=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. En estos problemas, el signo del radical se toma de tal manera que "p" sea positivo, por lo tanto: con la recta L, $p=\dfrac{3}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ y con la recta L', $p'=\dfrac{-6}{-\sqrt{(6)^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{45}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y como el origen se localiza entre las dos rectas, $d=p+p'=\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; $\boxed{d=\dfrac{5}{\sqrt{5}}\approx 2.24}$

2ª Forma.

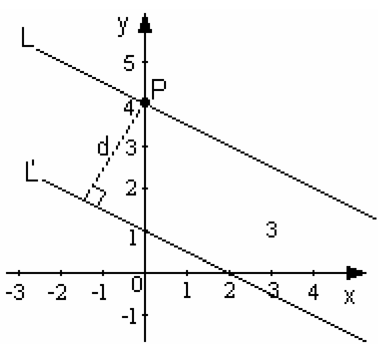
Si en la recta L hacemos $x=0$; $y=3$, $P(0,3)$ y calculando la distancia de P a la recta L' se tiene:

$$d=-\left(\frac{6x-3y-6}{\sqrt{(6)^2+(-3)^2}}\right)=\frac{-6(0)+3(3)+6}{\sqrt{45}}=\frac{15}{\sqrt{45}}=\frac{3(5)}{3(\sqrt{5})}=\frac{5}{\sqrt{5}}$$

Recordar que el signo negativo se debe a que el punto P y el origen están del mismo lado respecto a la recta L'.

2) $(L)\ldots\ x+2y-8=0$; $(L')\ldots\ x+2y-2=0$

Solución



1ª Forma.

Con (L): $p=\dfrac{-8}{-\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

Con (L'): $p'=\dfrac{-2}{-\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, como el origen de coordenadas se localiza del mismo lado respecto a las 2 rectas, $d=|p-p'|=\left|\dfrac{8}{\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{5}}\approx 2.7$

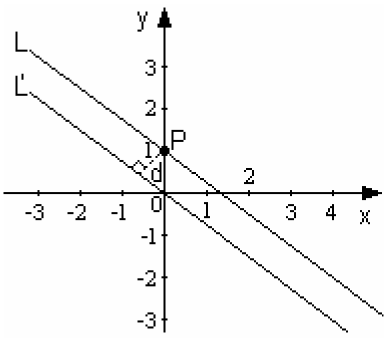
2ª Forma.

Si en L hacemos $x=0\ \Rightarrow\ y=4$; $P(0,4)$ y la distancia de P a L' es:

$$d=\frac{x+2y-2}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{0+2(4)-2}{\sqrt{5}}\ ;\ \boxed{d=\frac{6}{\sqrt{5}}}$$

3) $(L)\ldots\ 3x+4y-4=0$; $(L')\ldots\ 3x+4y=0$

Solución



1ª Forma.

Con (L): $p=\dfrac{-4}{-\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$

Con (L'): $p'=\dfrac{0}{\sqrt{25}}=0$, $d=p+p'=\dfrac{4}{5}+0=\dfrac{4}{5}$

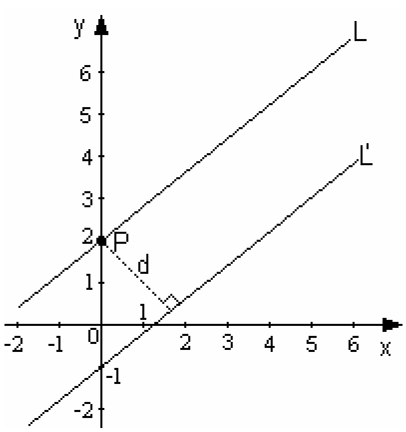
2ª Forma.

Si en L hacemos $x=0 \Rightarrow y=1$; $P(0,1)$ entonces la distancia de P a L' es:

$$d=\frac{3x+4y}{\sqrt{25}}=\frac{3(0)+4(1)}{5} \quad ; \quad \boxed{d=\frac{4}{5}}$$

4) $(L)\ldots\ 4x-5y+10=0$; $(L')\ldots\ 4x-5y-5=0$

Solución



1ª Forma.

Con (L): $p=\dfrac{10}{\sqrt{(4)^2+(-5)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{41}}$

Con (L'): $p'=\dfrac{-5}{-\sqrt{41}}=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$, como el origen se localiza entre las 2 rectas, $d=p+p'=\dfrac{10}{\sqrt{41}}+\dfrac{5}{\sqrt{41}}=\dfrac{15}{\sqrt{41}}\approx 2.3$

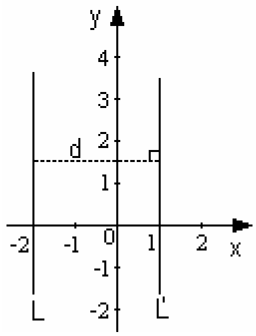
2ª Forma.

Si en L hacemos $x=0 \Rightarrow y=2$; $P(0,2)$ y como el origen y el punto están del mismo lado respecto a L',

$$d=-\left(\frac{4(0)-5(2)-5}{\sqrt{41}}\right)=\frac{10+5}{\sqrt{41}} \quad ; \quad \boxed{d=\frac{15}{\sqrt{41}}\approx 2.3}$$

5) $(L)\ldots\ 3x+6=0$; $(L')\ldots\ 3x-3=0$

<u>Solución</u>



Con (L): $p=\dfrac{6}{\sqrt{(3)^2+(0)^2}}=\dfrac{6}{3}=2$

Con (L'): $p'=\dfrac{-3}{-\sqrt{9}}=\dfrac{3}{3}=1$

$d=p+p'=2+1$; $\boxed{d=3}$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la distancia entre las dos rectas paralelas que se dan:

1) $(L)\ldots\ x-y+5=0$; $(L')\ldots\ x-y+2=0$

2) $(L)\ldots\ x-3y-3=0$; $(L')\ldots\ x-3y+6=0$

3) $(L)\ldots\ 3x+y-3=0$; $(L')\ldots\ 3x+y-1=0$

4) $(L)\ldots\ 2x-5y+7=0$; $(L')\ldots\ 2x-5y=0$

5) $(L)\ldots\ 2y-6=0$; $(L')\ldots\ 2y-2=0$