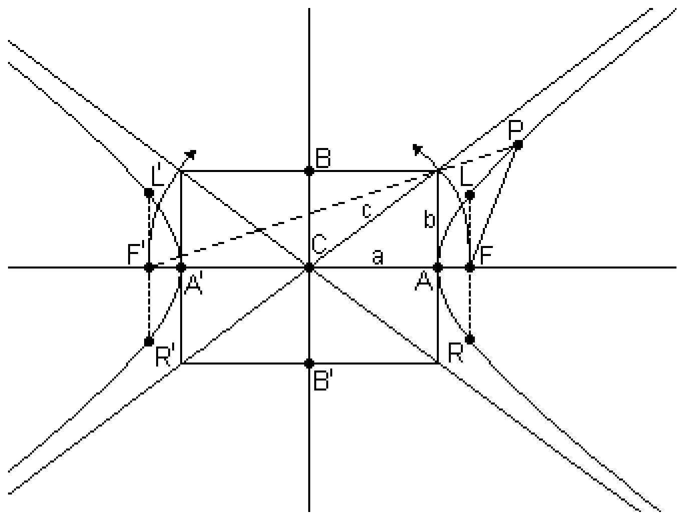
XI. LA HIPÉRBOLA

11.1. LA HIPÉRBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición

La hipérbola es el lugar geométrico descrito por un punto "P" que se mueve en el plano de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano F' y F (llamados focos), es siempre una cantidad constante $2a$.

Esto es $\left|PF'-PF\right| = 2a$



NOTACIONES

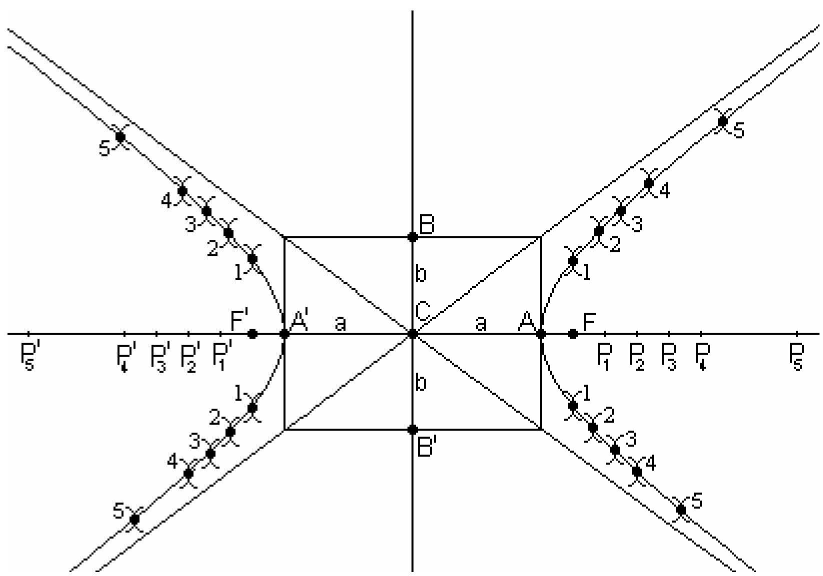
La hipérbola consta de dos ramas diferentes y de longitud infinita, en donde:

- $AA' = 2a$, eje focal o eje transverso (o eje real).
- $FF' = 2c$, distancia focal.
- $BB' = 2b$, eje conjugado (o eje imaginario).
- El punto medio de FF' es el centro C de la hipérbola.
- $CA' = CA = a$; $CB' = CB = b$; $CF' = CF = c$.
- Para que haya hipérbola es necesario que $c > a$.
- La cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje focal se llama lado recto (LR) o ancho focal.
- Las diagonales del rectángulo prolongadas se llaman asíntotas de la hipérbola.
- La relación entre a, b y c, por el teorema de Pitágoras es $c^2 = a^2 + b^2$.
- Si $a = b$, la hipérbola se llama EQUILÁTERA.
- La relación $e = \frac{c}{a}$ es la excentricidad de la hipérbola.

11.2. CONSTRUCCIÓN DE UNA HIPÉRBOLA CON REGLA Y COMPÁS

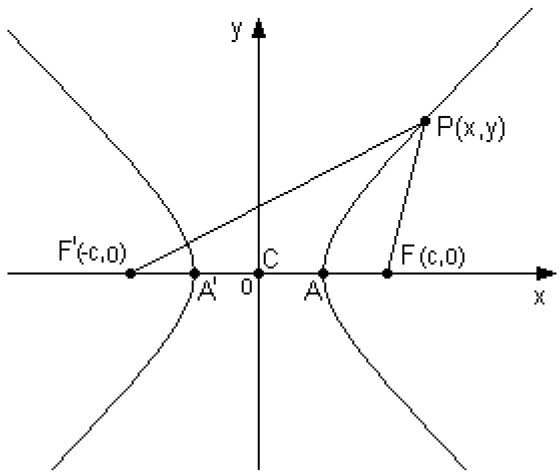
Para construir una hipérbola con regla y compás, suponemos conocidos los focos F, F', la cantidad constante $2a$ y el procedimiento es como sigue:

a) Se obtiene el punto medio de F, F' que es el centro "C" de la hipérbola.
b) Por el centro C se traza la perpendicular a F, F' (que es el eje conjugado).
c) A partir del centro C, se señalan los vértices A, A' que están a la distancia "a" de C o sea que $CA' = CA = a$.
d) Se construye el rectángulo de los ejes transverso y conjugado y se trazan las diagonales que son las asíntotas de la hipérbola.
e) Se marcan puntos cualesquiera a la derecha de F y a la izquierda de F', por ejemplo los simétricos $P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, P_3', P_4, P_4', P_5, P_5', \ldots$
f) Con centro en los focos y radios $A'P_1, AP_1$, se obtienen las intersecciones 1 que son puntos de la hipérbola ya que $1F' - 1F = AA' = 2a$, repitiendo esto con los radios $A'P_2, AP_2, A'P_3, AP_3, A'P_4, AP_4, A'P_5, AP_5$, se obtienen las intersecciones $2,3,4,5$, que uniéndolos con trazo continuo, se obtiene la curva.



11.3. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una hipérbola con "a" y "c" conocidos, ubicada en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas $C(0,0)$, sus focos están sobre el eje "x" cuyas coordenadas son $F'(-c,0)$ y $F(c,0)$ y sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la hipérbola (que puede estar sobre la rama izquierda o sobre la derecha sin que esto altere la definición de hipérbola) ubicado sobre la rama derecha como se muestra en la figura y que de acuerdo con la definición este punto P estará situado en la hipérbola dada si y solo si $PF'-PF=2a$, expresándola analíticamente:



si $PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Aislando el primer radical en el primer miembro, elevando al cuadrado, haciendo operaciones y reduciendo términos semejantes se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\left(cx-a^2\right)^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

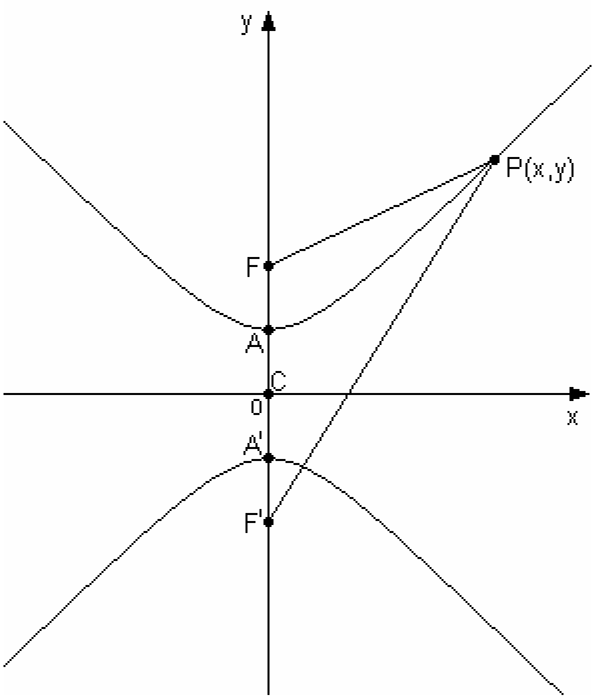
factorizando: $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$

De la sección 11.1, la relación entre a,b y c por el teorema de Pitágoras es $c^2=a^2+b^2$, despejando $b^2=c^2-a^2$ y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

dividiendo entre a^2b^2: $\dfrac{b^2x^2}{a^2b^2}-\dfrac{a^2y^2}{a^2b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2}$; $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ ...(I)

La expresión (I) es la <u>FORMA ORDINARIA</u> de la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje x.

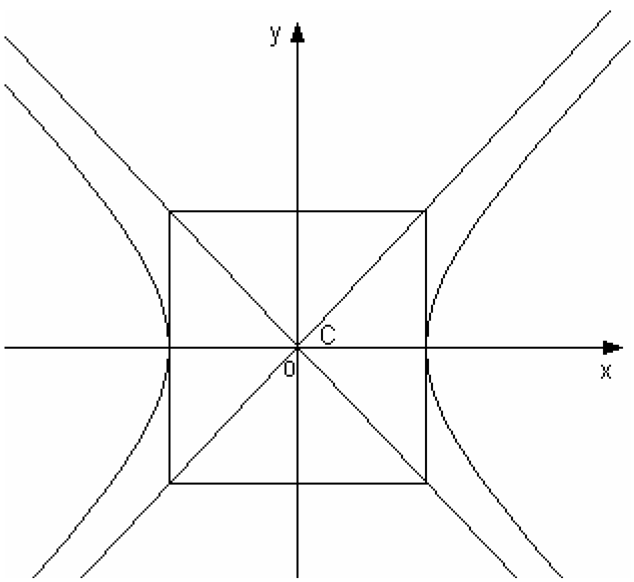


Con las mismas condiciones anteriores, pero con el eje focal coincidiendo con el eje "y", procediendo analíticamente en la misma forma se obtiene la ecuación $\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$ ...(II) que es la <u>FORMA ORDINARIA</u> de la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje y.

La ecuaciones (I) y (II) contienen sólo potencias pares en las variables x y y, la hipérbola que determinan cada una de ellas es <u>SIMÉTRICA</u> respecto a cada uno de los ejes coordenados y al origen, por lo que al bosquejar su gráfica es suficiente considerar solamente la parte que está situada en el primer cuadrante y aprovechando su simetría se puede completar el bosquejo de su gráfica.

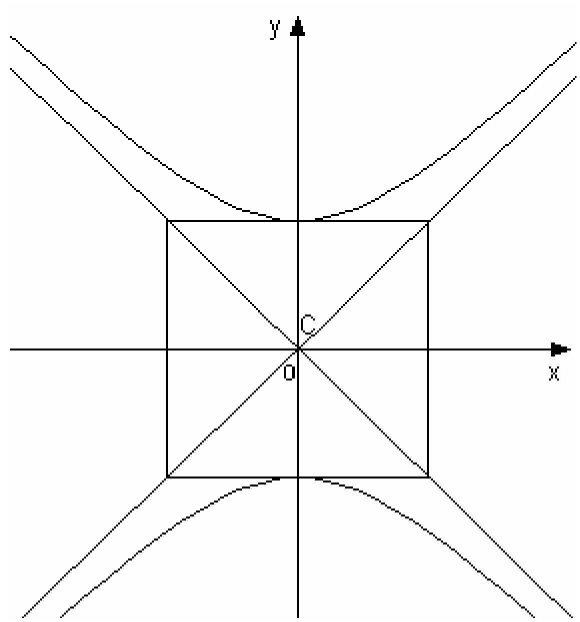
<u>Nota:</u>

- Si en las ecuaciones (I) y (II), los semiejes a y b son iguales ($a=b$), las hipérbolas resultantes se llaman <u>EQUILATERAS</u>, ya que el rectángulo principal de la hipérbola equilátera es un cuadrado y por lo tanto sus asíntotas son perpendiculares entre sí.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

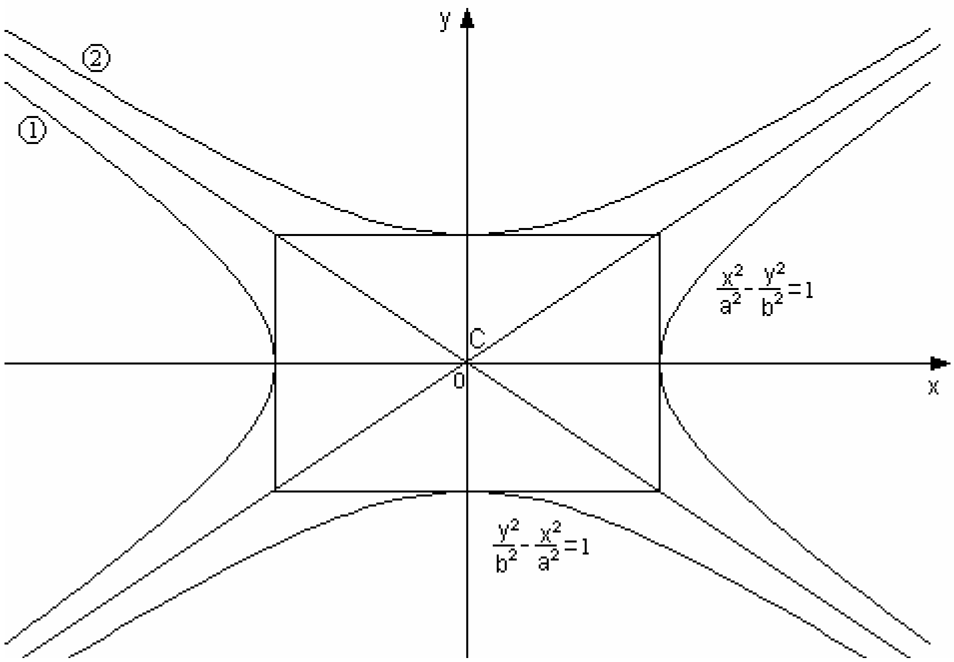
o bien $x^2-y^2=a^2$

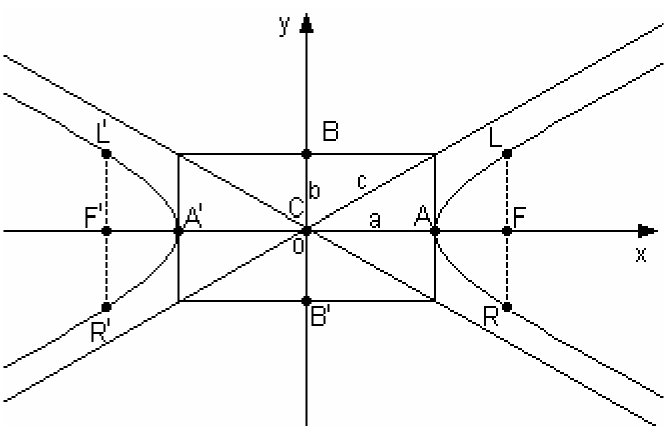


$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

o bien $y^2-x^2=a^2$

- Dos hipérbolas en un mismo sistema de coordenadas con ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ se llaman hipérbolas <u>CONJUGADAS</u> entre si.



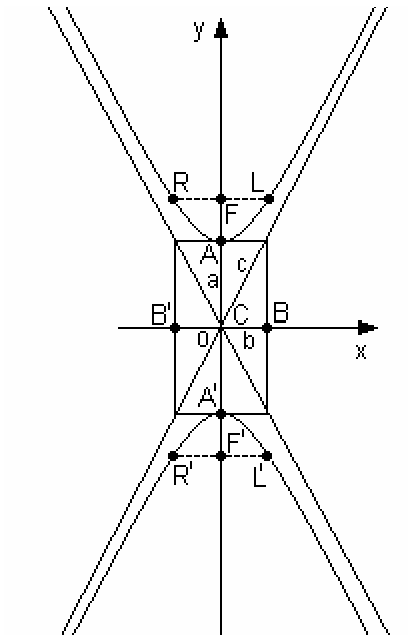


Los <u>ELEMENTOS</u> de la hipérbola referidos al sistema de coordenadas x, y son:

- Si la hipérbola es horizontal: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $C(0,0)$; $A(a,0)$; $B(0,b)$; $F(c,0)$, para determinar las coordenadas de L, despejamos "y" de la ecuación (I): $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, haciendo $x=c$ se tiene $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b^2}{a}$; $y=\frac{b^2}{a}$ es para $L\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$; $y=-\frac{b^2}{a}$ es para $R\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$. Por simetría de la hipérbola se tiene: $A'(-a,0)$; $B'(0,-b)$; $F'(-c,0)$ $L'\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$; $R\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$; Ecuación de las asíntotas: $y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$



- Si la hipérbola es vertical: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$; $C(0,0)$;

  $A(0,a)$ $B(b,0)$; $F(0,c)$; $L\left(\frac{b^2}{a},c\right)$

  Por simetría: $A'(0,-a)$; $B'(-b,0)$; $F'(0,-c)$; $L'\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$ $R\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$; $R'\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$

  Ecuación asíntotas: $y=\frac{a}{b}x$; $y=-\frac{a}{b}x$.

  Ecuación del eje focal: $x=0$ (eje y).

  Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

  Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

La EXCENTRICIDAD de la hipérbola es una característica de la forma de su rectángulo principal y por consiguiente de la forma de la misma hipérbola, quedando determinada por la relación de la distancia entre los focos de la hipérbola FF' a la distancia entre sus vértices $A'A$, quedando indicada por $e=\frac{c}{a}$, como en la hipérbola $c>a$, se tiene que esta relación siempre es mayor que uno o sea que $e>1$, cuanto más cercano es a uno esta valor, será más alargado su rectángulo principal en dirección de su eje focal, en el caso de la hipérbola equilátera, esta relación es $e=\sqrt{2}$.

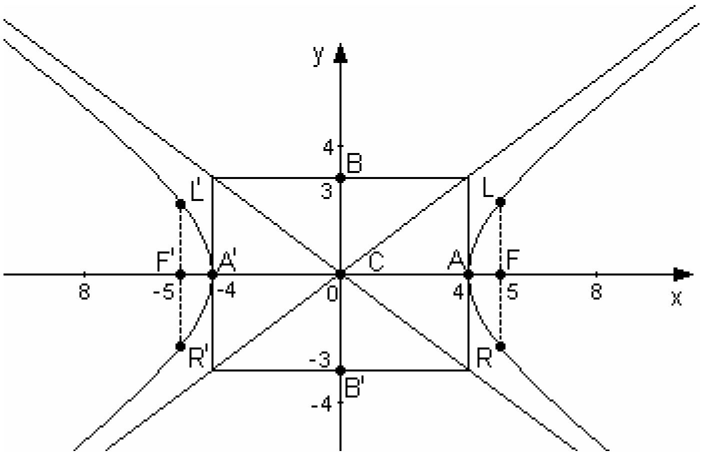
EJEMPLOS

En cada inciso del 1 al 3 se da la ecuación de una hipérbola, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Solución

La ecuación dada es de la forma (I)... $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal). Para que el bosquejo de la hipérbola se haga rápidamente, se recomienda construir primero el rectángulo principal, en seguida, trazar las asíntotas (las diagonales), luego los elementos del primer cuadrante, para después, aprovechando la simetría de la hipérbola completar su bosquejo.
De la ecuación dada: $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$, como $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+9=25$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$, por lo tanto, sus elementos son: $C(0,0)$; $A(4,0)$; $B(0,3)$; $F(5,0)$; $L\left(5,\frac{9}{4}\right)$



Por simetría: $A'(-4,0)$; $B'(0,-3)$; $F'(-5,0)$; $L'\left(-5,\frac{9}{4}\right)$; $R\left(5,-\frac{9}{4}\right)$; $R'\left(-5,-\frac{9}{4}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{3}{4}x$; $y=-\frac{3}{4}x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

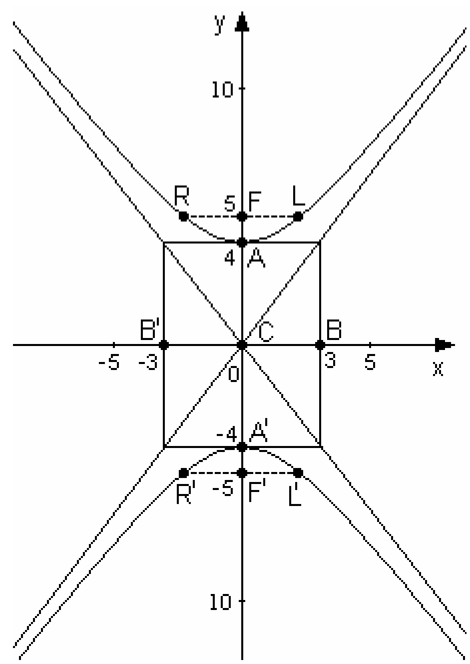
Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$

2) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

<u>Solución</u>

La ecuación dada es de la forma (II)... $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical), $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$, como $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+9=25$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$, por lo tanto, sus elementos son: $C(0,0)$; $A(0,4)$; $B(3,0)$; $F(0,5)$; $L\left(\frac{9}{4},5\right)$



Por simetría: $A'(0,-4)$; $B'(-3,0)$; $F'(0,-5)$; $L'\left(\frac{9}{4},-5\right)$; $R\left(-\frac{9}{4},5\right)$; $R'\left(-\frac{9}{4},-5\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{4}{3}x$; $y=-\frac{4}{3}x$.

Ecuación del eje focal : $x=0$ (eje y).

Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$

3) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1$

Solución

La ecuación dada es de la forma:

(I)... $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (horizontal) como $a^2=b^2$ $a=b$ o sea $a=b=5$ se trata de una hipérbola equilátera

$c^2=a^2+b^2=25+25=50$; $c=5\sqrt{2}$

$\frac{b^2}{a}=\frac{25}{5}=5$ y los elementos son: $C(0,0)$ $A(5,0)$; $B(0,5)$; $F(5\sqrt{2},0)$; $L(5\sqrt{2},5)$

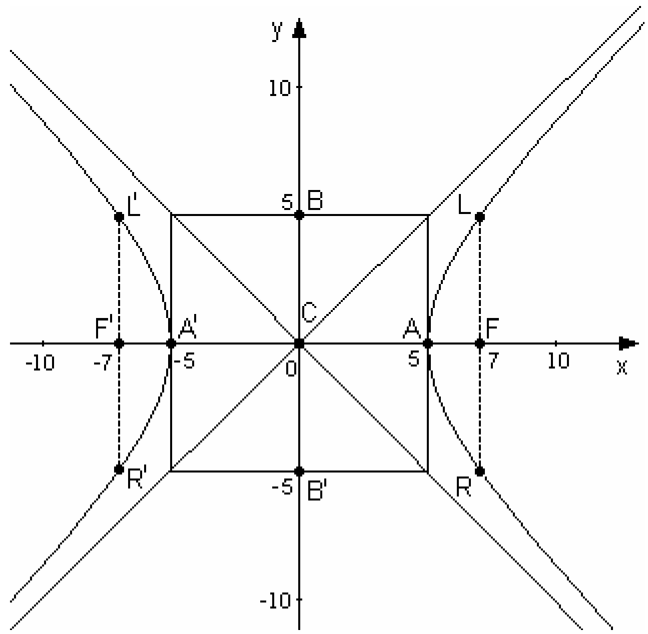
Por simetría: $A'(-5,0)$; $B'(0,-5)$; $F'(-5\sqrt{2},0)$; $L'(-5\sqrt{2},5)$; $R(5\sqrt{2},-5)$; $R'(-5\sqrt{2},-5)$

Ecuación asíntotas: $y=x$; $y=-x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

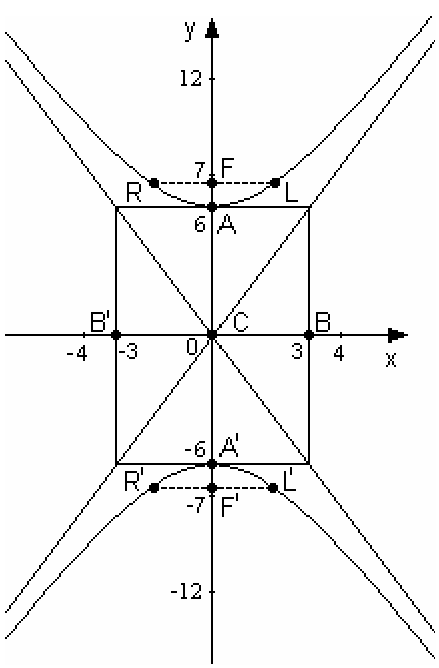
Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$



4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, $LR=3$, semieje transverso $a=6$ y eje focal sobre el eje y.

Solución



De acuerdo con la información dada, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

(II)... $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (vertical), si $a=6$ y $LR=\frac{2b^2}{a}=3$; $\frac{2b^2}{6}=3$

$b^2=9$; $b=3$; $c^2=a^2+b^2$; $c^2=36+9=45$; $c=3\sqrt{5}$ ecuación $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{9}=1$, los elementos son: $C(0,0)$; $A(0,6)$; $B(3,0)$ $F(0,3\sqrt{5})$; $L\left(\frac{3}{2},3\sqrt{5}\right)$. Por simetría: $A'(0,-6)$; $B'(-3,0)$ $F'(0,-3\sqrt{5})$; $L'\left(\frac{3}{2},-3\sqrt{5}\right)$; $R\left(-\frac{3}{2},3\sqrt{5}\right)$; $R'\left(-\frac{3}{2},-3\sqrt{5}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=2x$; $y=-2x$.

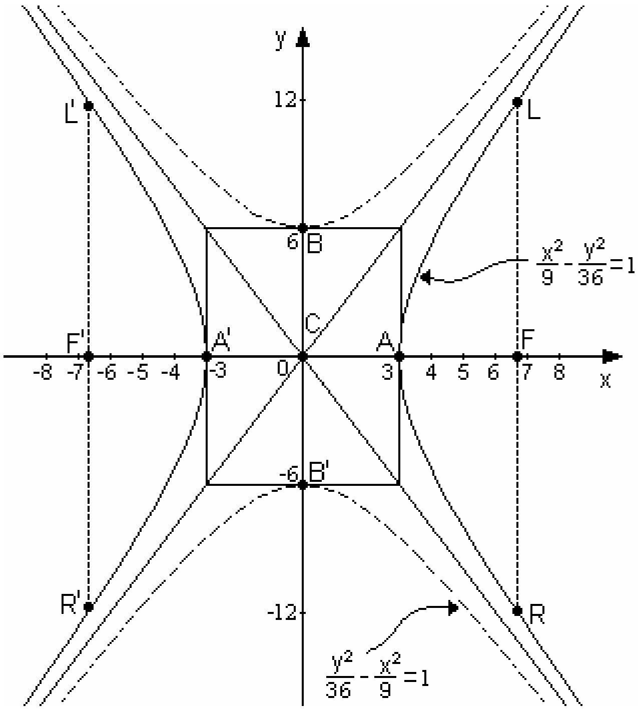
Ecuación del eje focal : $x=0$ (eje y).

Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{3\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

5) Obtener la hipérbola conjugada de $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{9}=1$

Solución



Las hipérbolas conjugadas comparten los mismos ejes, de tal modo que el eje focal de una es el conjugado de la otra y el conjugado de la primera es el focal de la otra. La ecuación de la hipérbola conjugada es: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (horizontal), donde $a^2=9$; $a=3$; $b^2=36$; $b=6$; $c^2=a^2+b^2$; $c^2=9+36=45$; $c=3\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=\frac{36}{3}=12$. Elementos: $C(0,0)$; $A(3,0)$; $B(0,6)$; $F(3\sqrt{5},0)$; $L(3\sqrt{5},12)$

Por simetría: $A'(-3,0)$; $B'(0,-6)$; $F'(-3\sqrt{5},0)$; $L'(-3\sqrt{5},12)$; $R(3\sqrt{5},-12)$; $R'(-3\sqrt{5},-12)$

Ecuación asíntotas: $y=2x$; $y=-2x$.

Ecuación del eje focal: $y=0$ (eje x).

Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

EJERCICIOS

En cada uno de los incisos del 1 al 3, se da la ecuación de una hipérbola, obtenga sus elementos y bosqueje su gráfica.

1) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1$

4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, $a=6$, $e=\frac{4}{3}$ y el eje focal sobre el eje y.

5) Obtener la ecuación de la hipérbola conjugada de $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1$, sus elementos y bosquejar su gráfica.

11.4. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

En forma análoga a la elipse, las ecuaciones (I)••• $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y (II)••• $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ nos muestran la siguiente PROPIEDAD ESENCIAL de la hipérbola, que sirve para obtener su ecuación en cualquier posición. En esta sección nos limitaremos únicamente a hipérbolas horizontales y verticales con centro fuera del origen.

PROPIEDAD ESENCIAL:

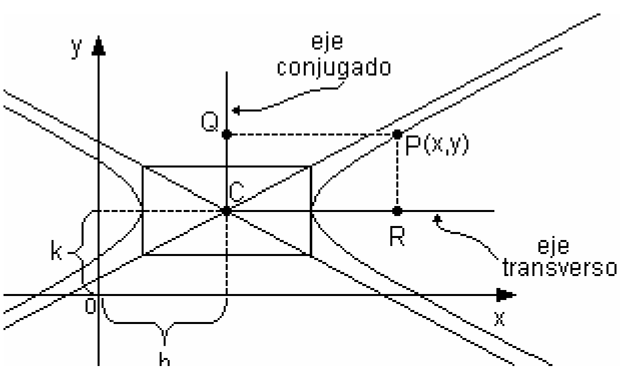
En las ecuaciones (I) y (II), el primero y segundo términos significan:

$$\frac{(\textit{La distancia de un punto cualquiera "P" de la hipérbola al eje conjugado})^2}{(\textit{Magnitud del semieje transverso})^2}-$$

$$-\frac{(\textit{La distancia de un punto cualquiera "P" de la hipérbola al eje transverso})^2}{(\textit{Magnitud del semieje conjugado})^2}$$

Apliquemos esta propiedad para obtener la ecuación de la hipérbola con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados:

a) Si el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje x como se muestra en la figura, al aplicar la propiedad esencial se tiene:



$$\frac{(PQ)^2}{a^2}-\frac{(PR)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(i)$$

donde $PQ=x-h$; $PR=y-k$

sustituyendo en (i):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \bullet\bullet\bullet(\text{III})$$

Esta es la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x (hipérbola horizontal).

b) Si el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje "y" como se muestra en la figura, aplicando la propiedad esencial se tiene:

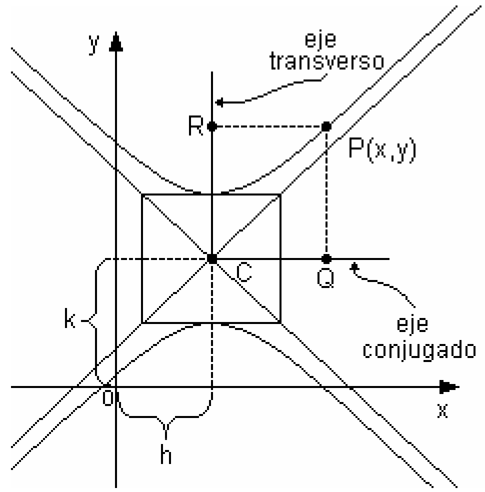
$$\frac{(PQ)^2}{a^2}-\frac{(PR)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(ii)$$

donde $PQ=y-k$; $PR=x-h$

sustituyendo en (ii):

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{IV})$$

(IV) es la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal (transverso) paralelo al eje y (hipérbola vertical).



Si las coordenadas del centro fueran $C(0,0)$, las ecuaciones (III) y (IV) se reducirán a las ecuaciones (I) y (II):

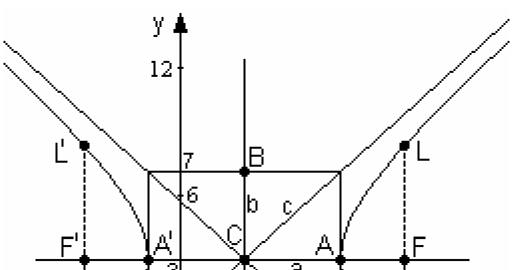
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}-\frac{(y-0)^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{I})$$

$$\frac{(y-0)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \ldots(\text{II})$$

EJEMPLOS

1) La ecuación de una hipérbola es $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$, obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

Solución



La ecuación dada es de la forma:

(III)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal), la cual nos proporciona los siguientes datos: las coordenadas del centro $C(h,k)=(2,3)$; $a^2=9$; $a=3$; $b^2=16$; $b=4$; y como $c^2=a^2+b^2$; $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$ $c=5$. Con estos datos ya podemos calcular los elementos de la hipérbola para bosquejar su gráfica en forma análoga a las hipérbolas de la forma (I) y (II).

A partir del centro $C(2,3)$, se construye el rectángulo principal y se trazan sus diagonales (asíntotas) luego se ubican sus elementos a partir del centro y en forma análoga como en las ecuaciones de la forma (I) y (II).

$C(h,k)=(2,3)$; $A(h+a,k)=(5,3)$; $B(h,k+b)=(2,7)$; $F(h+c,k)=(7,3)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(7,\frac{25}{3}\right)$.

Por simetría: $A'(h-a,k)=(-1,3)$; $B'(h,k-b)=(2,-1)$; $F'(h-c,k)=(-3,3)$

$L'\left(h-c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(-3,\frac{25}{3}\right)$; $R\left(h+c,k-\frac{b^2}{a}\right)=\left(7,-\frac{7}{3}\right)$; $R'\left(h-c,k-\frac{b^2}{a}\right)=\left(-3,-\frac{7}{3}\right)$.

Ecuación de las asíntotas: son 2 rectas que pasan por el punto $C(2,3)$ y que tienen pendiente $m=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{4}{3}$ o sea: $y-3=\pm\frac{4}{3}(x-2)$; $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ y $y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$.

Ecuación del eje focal (o transverso): $y=3$ (recta horizontal).

Ecuación del eje conjugado: $x=2$ (recta vertical).

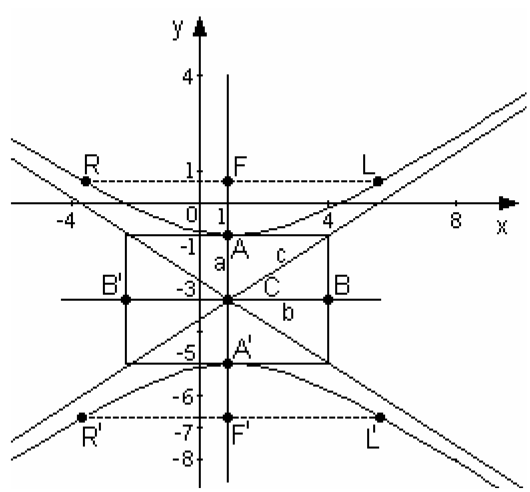
Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$

2) Obtener la ecuación y el bosquejo de la gráfica de la hipérbola con centro $C(1,-3)$ y vértices $A(1,-1)$, $B(4,3)$.

Solución

De acuerdo con la información dada, la ecuación de esta hipérbola es de la forma:

(IV)... $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical), en donde $CA=a$; $a=2$; $CB=b$; $b=3$ y $c^2=a^2+b^2=4+9$; $c=\sqrt{13}$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{2}$; la ecuación es: $\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$.



Elementos: $C(h,k)=(1,-3)$; $A(h,k+a)=(1,-1)$

$B(h+b,k)=(4,-3)$; $F(h,k+c)=(1,-3+\sqrt{13})$

$L\left(h+\frac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\frac{11}{2},-3+\sqrt{13}\right)$.

Por simetría: $A'(h,k-a)=(1,-5)$; $B'(h-b,k)=(-2,-3)$; $F'(h,k-c)=(1,-3-\sqrt{13})$;

$L'\left(h+\frac{b^2}{a},k-c\right)=\left(\frac{11}{2},-3-\sqrt{13}\right)$; $R\left(h-\frac{b^2}{a},k+c\right)=\left(-\frac{7}{2},-3+\sqrt{13}\right)$;

$R'\left(h-\frac{b^2}{a},k-c\right)=\left(-\frac{7}{2},-3-\sqrt{13}\right)$

Ecuación asíntotas: $y+3=\pm\frac{2}{3}(x-1)$; $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ y $y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

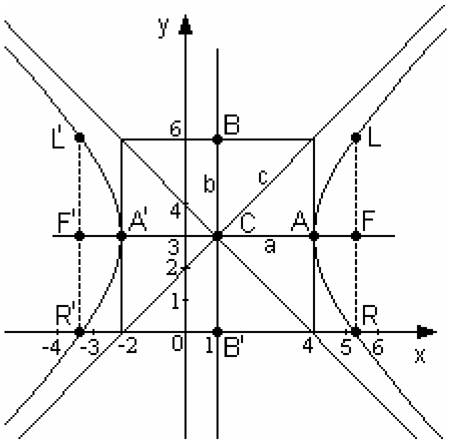
Ecuación eje focal: $x=1$ (recta vertical).

Ecuación eje conjugado: $y=-3$ (recta horizontal).

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

3) Obtener la ecuación de la hipérbola con extremos del eje transverso $A'(-2,3)$, $A(4,3)$, foco $F\left(1+3\sqrt{2},3\right)$ y bosquejar su gráfica.

Solución



De acuerdo con la información dada, la ecuación de la hipérbola es de la forma (III)••• $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal). El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $A'A$: $C\left(\frac{x_{A'}+x_A}{2},\frac{y_{A'}+y_A}{2}\right)=(1,3)$

$CA=a=4-1=3$; $CF=c=1+3\sqrt{2}-1$; $c=3\sqrt{2}$

si $c^2=a^2+b^2$; $b^2=c^2-a^2=18-9=9$; $b=3$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{3}=3$

como $a=b$; $3=3$. La hipérbola es equilátera y su ecuación es: $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$

Elementos: $C(1,3)$; $A(4,3)$; $B(1,6)$; $F\left(1+3\sqrt{2},3\right)$; $L\left(1+3\sqrt{2},6\right)$.

Por simetría: $A'(-2,3)$; $B'(1,6)$; $F'\left(1-3\sqrt{2},3\right)$; $L'\left(1-3\sqrt{2},6\right)$; $R\left(1+3\sqrt{2},0\right)$; $R'\left(1-3\sqrt{2},0\right)$

Ecuación asíntotas: $y-3=\pm1(x-1)$; $y=x+2$; $y=-x+4$

Ecuación eje transverso: $y=3$.

Ecuación eje conjugado: $x=1$.

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$

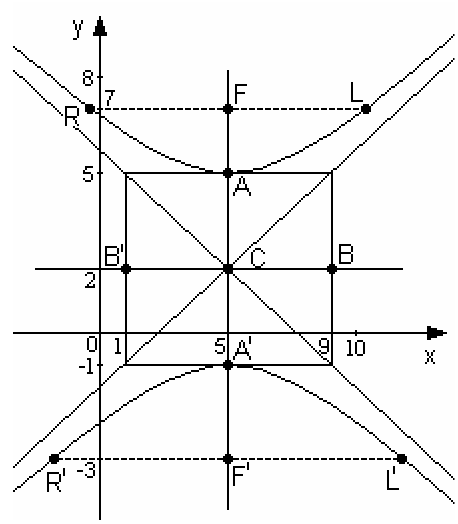
4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro $C(5,2)$, foco $F(5,7)$, excentricidad $e=\frac{5}{3}$ y bosquejar su gráfica.

Solución

De acuerdo con los datos del problema, la ecuación de la hipérbola es de la forma (IV)••• $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical). El segmento $CF=c=7-2$; $c=5$

Si $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$; $a=3$; $b^2=c^2-a^2=25-9=16$; $b=4$

$\frac{b^2}{a}=\frac{16}{3}$. Ecuación: $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-5)^2}{16}=1$



Elementos: $C(5,2)$; $A(5,5)$; $B(9,2)$; $F(5,7)$; $L\left(\frac{31}{3},7\right)$.

Por simetría: $A'(5,-1)$; $B'(1,2)$; $F'(5,-3)$

$L'\left(\frac{31}{3},-\frac{10}{3}\right)$; $R\left(-\frac{1}{3},7\right)$; $R'\left(-\frac{1}{3},-\frac{10}{3}\right)$

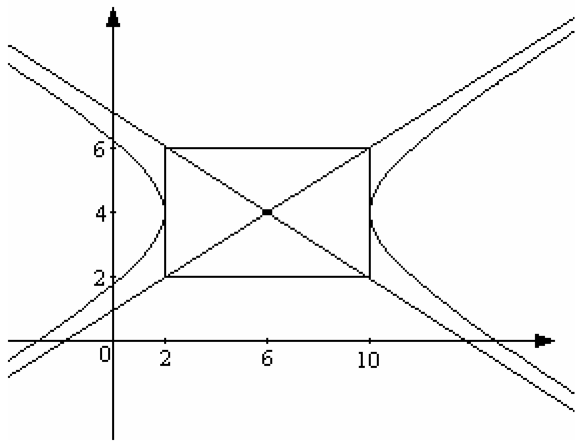
Ecuación asíntotas: $y-2=\pm\frac{3}{4}(x-5)$; $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$; $y=-\frac{3}{4}x+\frac{23}{4}$

Ecuación eje transverso: $x=5$.

Ecuación eje conjugado: $y=2$.

Excentricidad: $e=\frac{5}{3}$

5) Obtener la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas en la siguiente gráfica, y sus elementos.



Solución

La ecuación de la hipérbola es de la forma (III)••• $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal).

A simple vista podemos decir que $C(6,4)$; $A(10,4)$; $B(6,6)$; $A'(2,4)$; $B'(6,2)$, por lo tanto $a=4$; $b=2$ y como $c^2=a^2+b^2=16+4=20$; $c=2\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=1$; ecuación: $\frac{(x-6)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$

Los elementos restantes son: $F(6+2\sqrt{5},4)$; $L(6+2\sqrt{5},5)$; $F'(6-2\sqrt{5},4)$; $L'(6-2\sqrt{5},5)$; $R(6+2\sqrt{5},3)$; $R'(6-2\sqrt{5},3)$.

Ecuación asíntotas: $y-4=\pm\frac{1}{2}(x-6)$; $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=-\frac{1}{2}x+7$

Ecuación eje transverso: $y=4$.

Ecuación eje conjugado: $x=6$.

Excentricidad: $e=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

EJERCICIOS

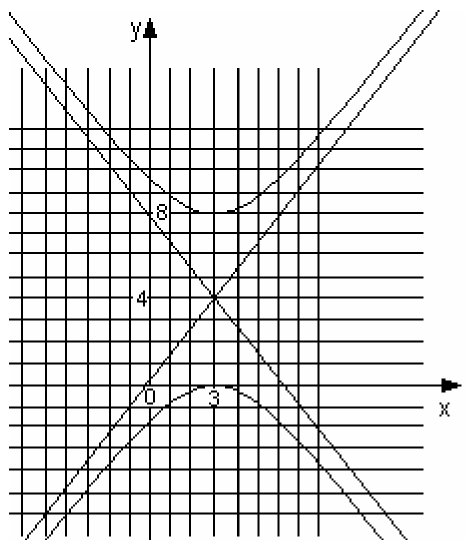
1) Obtenga los elementos de la hipérbola $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$ y bosque su gráfica.

2) Obtener la ecuación, los elementos y el bosquejo de la gráfica de la hipérbola con vértices $A(8,-4)$, $A'(-4,-4)$ y $LR=3$.

3) Una hipérbola tiene centro $C(5,0)$, foco $F(9,0)$, excentricidad $e=2$, obtenga su ecuación, sus elementos y bosqueje su gráfica.

4) Un extremo del eje conjugado de una hipérbola tiene coordenadas $B(6,4)$, su centro $C(3,4)$ y $L\left(\frac{21}{4},9\right)$, obtenga la ecuación, sus elementos y bosqueje su gráfica.

5) Obtenga la ecuación y los elementos de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas en la siguiente gráfica.



11.5. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

En forma análoga a la elipse, si en las ecuaciones (III)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y (IV)... $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ multiplicamos por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos la ecuación en FORMA GENERAL de la hipérbola $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, donde los coeficientes A y C son de signo contrario, los coeficientes de primer grado D y E indican que el centro de la hipérbola está fuera del origen, si $D=0$ el centro está sobre el eje "y", si $E=0$ estará sobre el eje "x", el término independiente F indica que la hipérbola no pasa por el origen y si $F=0$ entonces si pasa por el origen.

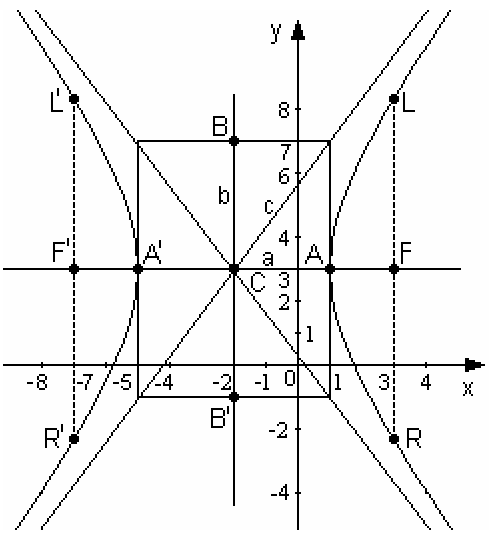
Recíprocamente, cuando la ecuación de una hipérbola es dada en forma general, puede obtenerse su forma ordinaria mediante el método de completar cuadrados y así conocer sus elementos para bosquejar su gráfica.

EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una hipérbola en forma general, obtener su forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $16x^2-9y^2+64x+54y-161=0$

Solución



Se ordena la ecuación dada como sigue:

$16x^2+64x-9y^2+54y=161$

factorizando y completando cuadrados:

$16(x^2+4x)-9(y^2-6y)=161$

$16\left[x^2+4x+(2)^2\right]-9\left[y^2-6y+(3)^2\right]=161+64-81$

$16(x+2)^2-9(y-3)^2=144$

dividiendo entre 144:

$$\frac{16(x+2)^2}{144}-\frac{9(y-3)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{144}{16}}-\frac{(y-3)^2}{\frac{144}{9}}=1\,;\quad \boxed{\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1}\ \text{Forma ordinaria}$$

$a^2=9$; $a=3$; $b^2=16$; $b=4$; $c^2=a^2+b^2=9+16=25$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{16}{3}$

Elementos: $C(-2,3)$; $A(1,3)$; $B(-2,7)$; $F(3,3)$; $L\left(3,\frac{25}{3}\right)$

Por simetría: $A'(-5,3)$; $B'(-2,-1)$; $F'(-7,3)$; $L'\left(-7,\frac{25}{3}\right)$; $R\left(3,-\frac{7}{3}\right)$; $R'\left(-7,-\frac{7}{3}\right)$

Ecuación asíntotas: $y-3=\pm\frac{4}{3}(x+2)$; $y=\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$; $y=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

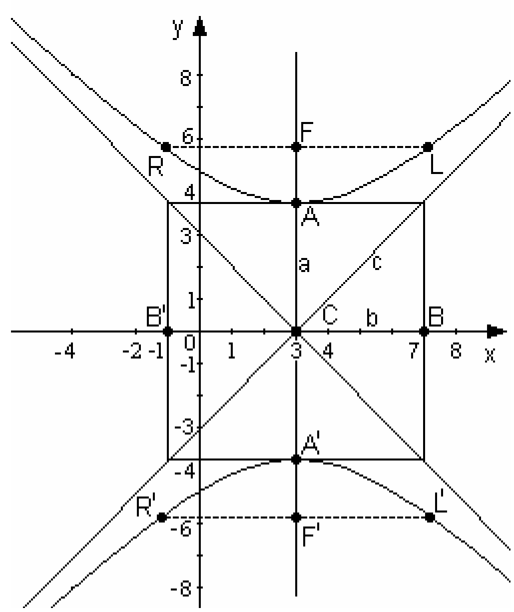
Ecuación eje transverso: $y=3$.

Ecuación eje conjugado: $x=-2$.

Excentricidad: $e=\frac{5}{3}$

2) $2y^2 - 2x^2 + 12x - 50 = 0$

Solución



Observar que en la ecuación dada no aparece el término de primer grado en "y", o sea que el coeficiente $E = 0$, por lo tanto el centro de la hipérbola estará sobre el eje x.

Dividiendo la ecuación dada entre 2 se tiene:

$y^2 - x^2 + 6x - 25 = 0$

factorizando y completando cuadrados:

$y^2 - \left(x^2 - 6x + (3)^2\right) = 25 - 9$

$y^2 - (x-3)^2 = 16$

dividiendo entre 16: $\frac{y^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ forma ordinaria, se trata de una hipérbola equilátera vertical, en donde

$a^2 = b^2 = 16$; $a = b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 32$; $c = 4\sqrt{2}$; $\frac{b^2}{a} = 4$

Elementos: $C(3,0)$; $A(3,4)$; $B(7,0)$; $F\left(3,4\sqrt{2}\right)$; $L\left(7,4\sqrt{2}\right)$

Por simetría: $A'(3,-4)$; $B'(-1,0)$; $F'\left(3,-4\sqrt{2}\right)$; $L'\left(7,-4\sqrt{2}\right)$; $R\left(-1,4\sqrt{2}\right)$; $R'\left(-1,-4\sqrt{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y = \pm 1(x-3)$; $y = x - 3$; $y = -x + 3$

Ecuación eje transverso: $x = 3$.

Ecuación eje conjugado: $y = 0$ (eje x).

Excentricidad: $e = \sqrt{2}$

3) $3x^2 - 12y^2 - 48y - 60 = 0$

Solución

Como no hay término en "x", el coeficiente $D = 0$, la hipérbola tendrá su centro sobre el eje "y".

Dividiendo la ecuación dada entre 3 se obtiene: $x^2 - 4y^2 - 16y - 20 = 0$

factorizando y completando cuadrados:

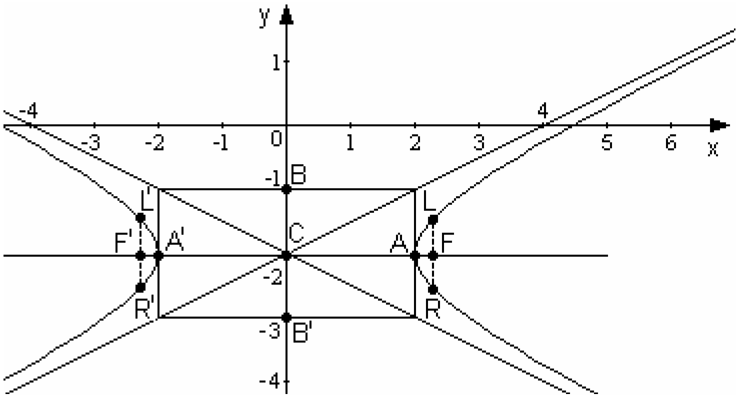
$x^2 - 4\left(y^2 + 4y\right) = 20$

$x^2 - 4\left(y^2 + 4y + (2)^2\right) = 20 - 16$

$x^2 - 4(y+2)^2 = 4$

Dividiendo entre 4: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{\frac{4}{4}} = \frac{4}{4}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola horizontal, donde:



$a^2 = 4$; $a = 2$; $b^2 = 1$; $b = 1$;

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1$; $c = \sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}$

Elementos: $C(0,-2)$; $A(2,-2)$; $B(0,-1)$;

$F\left(-\sqrt{5},-2\right)$; $L\left(\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right)$

Por simetría: $A'(-2,-2)$; $B'(0,-3)$;

$F'\left(\sqrt{5},-2\right)$; $L'\left(-\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right)$; $R\left(\sqrt{5},-\frac{5}{2}\right)$;

$R'\left(-\sqrt{5},-\frac{5}{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{1}{2}(x - 0)$; $y = \frac{1}{2}x - 2$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Ecuación eje transverso: $y = -2$.

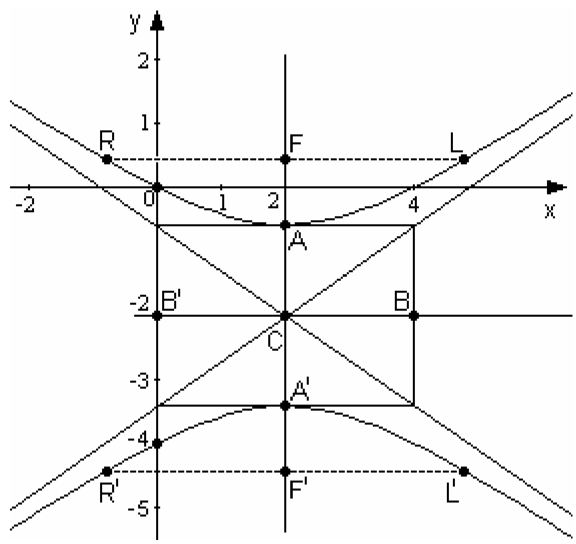
Ecuación eje conjugado: $x = 0$ (eje y).

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

4) $4y^2 - 2x^2 + 8x + 16y = 0$

<u>Solución</u>

La ecuación dada carece de término independiente ($F = 0$), por lo tanto se trata de una hipérbola que pasa por el origen.



Dividiendo la ecuación dada entre 2 se obtiene: $2y^2 - x^2 + 4x + 8y = 0$, ordenando, factorizando y completando cuadrados:

$2y^2 + 8y - x^2 + 4x = 0$

$2\left(y^2 + 4y + (2)^2\right) - \left(x^2 - 4x + (2)^2\right) = 8 - 4$

$2(y + 2)^2 - (x - 2)^2 = 4$

Dividiendo entre 4: $\frac{(y + 2)^2}{\frac{4}{2}} - \frac{(x - 2)^2}{4} = \frac{4}{4}$

$\frac{(y + 2)^2}{2} - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola vertical, donde:

$a^2 = 2$; $a = \sqrt{2}$; $b^2 = 4$; $b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 4 = 6$; $c = \sqrt{6}$; $\frac{b^2}{a} = 2\sqrt{2}$

Elementos: $C(2,-2)$; $A\left(2,-2 + \sqrt{2}\right)$; $B(4,-2)$; $F\left(2,-2 + \sqrt{6}\right)$; $L\left(2 + 2\sqrt{2},-2 + \sqrt{6}\right)$

Por simetría: $A'\left(2,-2-\sqrt{2}\right)$; $B'(0,-2)$; $F'\left(2,-2-\sqrt{6}\right)$; $L'\left(2+2\sqrt{2},-2-\sqrt{6}\right)$; $R\left(2-2\sqrt{2},-2+\sqrt{6}\right)$; $R'\left(2-2\sqrt{2},-2-\sqrt{6}\right)$

Ecuación asíntotas: $y+2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}-2$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}-2$

Ecuación eje transverso: $x=2$

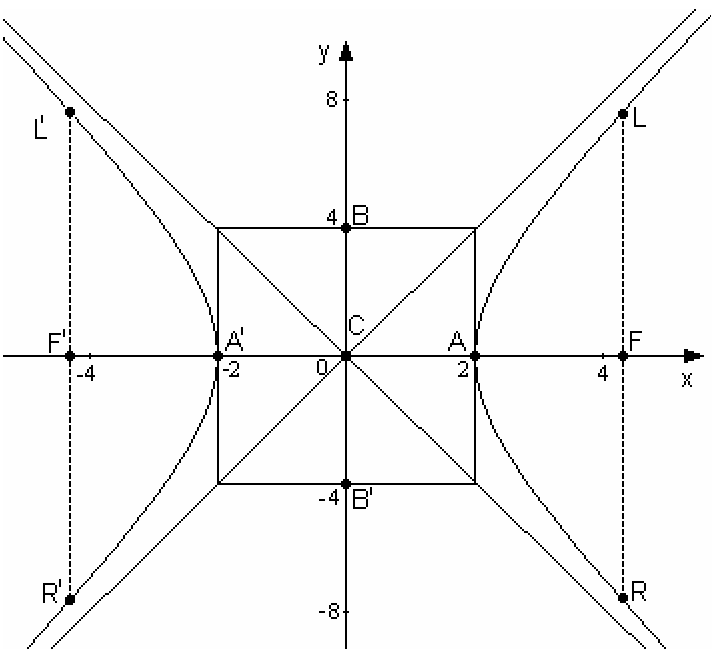
Ecuación eje conjugado: $y=-2$

Excentricidad: $e=\sqrt{3}$

5) $16x^2-4y^2-64=0$

Solución

La ecuación dada carece de términos de primer grado o sea que $D=E=0$, por lo tanto se trata de una hipérbola con centro en el origen. Ordenando términos y dividiendo entre 64:



$$\frac{x^2}{\frac{64}{16}}-\frac{y^2}{\frac{64}{4}}=\frac{64}{64}$$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola horizontal, donde: $a^2=4$; $a=2$; $b^2=16$; $b=4$; $c^2=a^2+b^2=20$; $c=2\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=8$

Elementos: $C(0,0)$; $A(2,0)$; $B(0,4)$; $F\left(2\sqrt{5},0\right)$; $L\left(2\sqrt{5},8\right)$

Por simetría: $A'(-2,0)$; $B'(0,-4)$; $F'\left(-2\sqrt{5},0\right)$; $L'\left(-2\sqrt{5},8\right)$; $R\left(2\sqrt{5},-8\right)$; $R'\left(-2\sqrt{5},-8\right)$

Ecuación asíntotas: $y=2x$; $y=-2x$

Ecuación eje transverso: $y=0$ (eje x).

Ecuación eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\sqrt{5}$

EJERCICIOS

En cada inciso se da la ecuación de una hipérbola en forma general, obtenga su forma ordinaria, sus elementos y bosqueje su gráfica.

1) $9y^2 - 16x^2 - 64x - 54y - 127 = 0$

2) $3x^2 - 3y^2 - 24x + 21 = 0$

3) $4y^2 - x^2 + 16y + 12 = 0$

4) $x^2 - 2y^2 - 8x + 8y = 0$

5) $4y^2 - x^2 - 4 = 0$