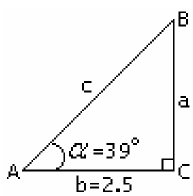
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO II

2.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1) De acuerdo con la notación convenida, se tiene el siguiente bosquejo del triángulo, donde:



$$\tan 39^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{2.5}$$

despejando $a = b\tan 39^0 = 2.5\tan 39^0 \cong 2.02$

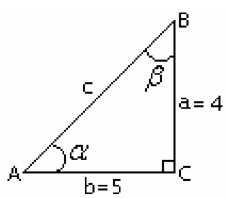
$$\cos 39^0 = \frac{b}{c} = \frac{2.5}{c}$$

despejando $c = \dfrac{2.5}{\cos 39^0} \cong 3.22$

y como $\alpha + \beta = 90^0; \quad \beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 39^0 = 51^0$

Por lo tanto $a \cong 2.02; \quad c \cong 3.22 \quad y \quad \beta = 51^0$

2) Por Pitágoras: $c = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} \cong 6.40$

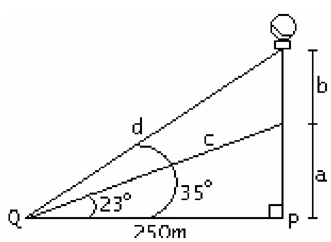


$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{5} = 0.8; \quad \alpha = \tan^{-1}(0.8) = 38.66^0$$

$$\alpha + \beta = 90^0; \quad \beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 38.66^0 = 51.34^0$$

Entonces $c \cong 6.40; \quad \alpha = 38.66^0 \quad y \quad \beta = 51.34^0$

3) De acuerdo con los datos, el bosquejo del problema es el que se muestra, donde la magnitud "b" es la respuesta.



Si $\tan 23^0 = \dfrac{a}{250}$

despejando $a = 250\tan 23^0 \cong 106.12\,[m]$

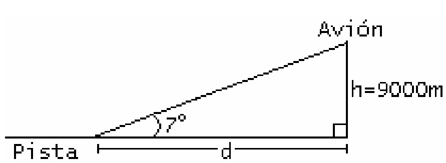
$$\tan 35^0 = \frac{a+b}{250}$$

despejando $a + b = 250\tan 35^0 \cong 175.05\,[m]$

donde $b = 175.05 - a = 175.05 - 106.12$

$b = 68.93\,[m]$

4) El bosquejo aproximado sería como se muestra en la siguiente figura, donde:

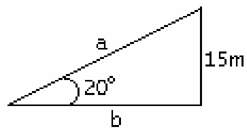


Si $\tan 7^0 = \dfrac{9000}{d}$

despejando $d = \dfrac{9000}{\tan 7^0} \cong 73299\,[m]$

aproximadamente a $73.3\,[Km]$

5) Con el triángulo que tiene un ángulo de 20^0, tenemos:

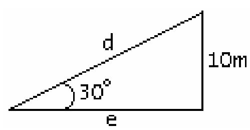


$$sen20^0 = \frac{15}{a}$$

despejando $a = \dfrac{15}{sen20^0} \cong 43.86\,[m]$

por el Teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{(43.86)^2 - (15)^2} \cong 41.22\,[m]$

con el triángulo que tiene un ángulo de 30^0, se tiene:



$$sen30^0 = \frac{10}{d}$$

despejando $d = \dfrac{10}{sen30^0} = 20\,[m]$

por el Teorema de Pitágoras $e = \sqrt{(20)^2 - (10)^2} \cong 17.32\,[m]$

La magnitud $c = 110 - (b + e) = 110 - 58.54 = 51.46\,[m]$
Luego entonces, la longitud total del tobogán es $a + c + d = 43.86 + 51.46 + 20 = 115.32\,[m]$

2.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CUALQUIER CUADRANTE

1)

Ángulo	tan	cot	sec	csc	Cuadrante
0	0	indefinido	1	indefinido	I
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	I
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	indefinido	0	indefinido	1	I
$\frac{2}{3}\pi = 120^0$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	II
$\pi = 180^0$	0	indefinido	-1	indefinido	II
$\frac{5}{4}\pi = 225^0$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	III
$\frac{3}{2}\pi = 270^0$	indefinido	0	indefinido	-1	III
$\frac{5}{3}\pi = 300^0$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IV
$2\pi = 360^0$	0	indefinido	1	indefinido	IV

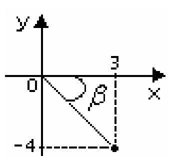
2)

Ángulo	cos	cot	csc	Cuadrante
75^0	0.2588	0.2679	1.0353	I
150^0	-0.8660	-1.7321	2.0000	II
230^0	-0.6428	0.8391	-1.3054	III
283^0	0.2250	-0.2309	-1.0263	IV

3)

Ángulo	sen	tan	sec	Cuadrante
$1.2 \cong 68.75^0$	0.9320	2.5722	2.7597	I
$2.4536 \cong 140.58^0$	0.6350	-0.8220	-1.2945	II
$-0.2731 \cong -15.65^0$	-0.2697	-0.2801	1.0385	IV
$-4.27 \cong -244.65^0$	0.9037	-2.1110	-2.3359	II
$0.5731 \cong 32.84^0$	0.5422	0.6454	1.1902	III

4) En el bosquejo de la información dada del problema puede ser el siguiente:



La magnitud del segmento $\overline{PQ}$ la obtenemos del Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Consideramos que el ángulo generado β es negativo y su valor es: $sen\beta = \frac{-4}{5} = -0.8$

donde $\beta = sen^{-1}(-0.8) \cong -53.14^0$

Por lo tanto:

$$sen(-53.14^0) = -0.8 \quad ; \quad \csc(-53.14^0) = \frac{5}{-4} = -1.25$$

$$\cos(-53.14^0) = \frac{3}{5} = 0.6 \quad ; \quad \sec(-53.14^0) = \frac{5}{3} \cong 1.7$$

$$\tan(-53.14^0) = \frac{-4}{3} = -1.3 \quad : \quad \cot(-53.14^0) = \frac{3}{-4} = -0.75$$

5) Como $\frac{1}{3}\pi = 60^0$, entonces $\frac{4}{3}\pi = 4(60^0) = 240^0$ (tercer cuadrante)

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos 240^0 = -0.5$$

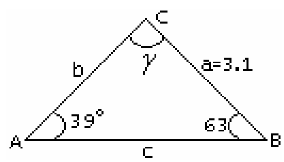
Como $\frac{1}{6}\pi = 30^0$, entonces $\frac{7}{6}\pi = 7(30^0) = 210^0$ (tercer cuadrante)

$sen\left(\frac{7}{6}\pi\right) = sen210^0 = -0.5$

$\tan 315^0 = -1$ (cuarto cuadrante)
$\sec(-150^0) \cong -1.1547$ (tercer cuadrante)
$\csc(-120^0) \cong -1.1547$ (tercer cuadrante)
$\cot(225^0) = 1$ (tercer cuadrante)

2.4. LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

1)



Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 102^0$

$\underline{\gamma = 78^0}$

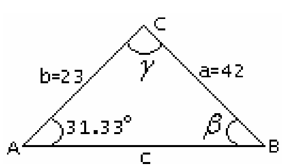
Por la ley de los senos:

$\frac{b}{sen63^0} = \frac{a}{sen39^0}$; $b = \frac{(3.1)(sen63^0)}{sen39^0} \cong 4.4$

Por ley de los cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (3.1)^2 + (4.4)^2 - 2(3.1)(4.4)\cos 78^0 \cong 23.3$
$\underline{c = \sqrt{23.3} \cong 4.8}$

2)



Por la ley de los senos $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$; $sen\beta = \frac{bsen\alpha}{a}$

$sen\beta = \frac{23sen31.33^0}{42}$

$sen\beta = 0.2847$

$\beta = sen^{-1}(0.2847)$

$\underline{\beta = 16.54^0}$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$
$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 47.87^0$
$\underline{\gamma = 132.13^0}$

Por la ley de los cosenos:

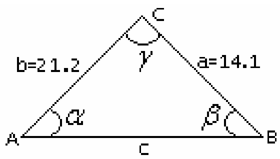
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (42)^2 + (23)^2 - 2(42)(23)\cos 132.13^0$
$c^2 \cong 3589$; $c = \sqrt{3589}$
$\underline{c \cong 59.91}$

3)

Por la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (14.1)^2 + (21.2)^2 - 2(14.1)(21.2)\cos 58.57^0$$

$$c^2 = 336.5 \; ; \; c = \sqrt{336.5} \cong 18.34$$



$\underline{c = 18.34}$

Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{c}{sen\gamma}$; $sen\alpha = \dfrac{asen\gamma}{c}$

$$sen\alpha = \frac{14.1 sen 58.75^0}{18.34} \cong 0.6573$$

$\alpha = sen^{-1} 0.6573 = 41.09^0$; $\underline{\alpha = 41.09^0}$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - 99.84^0$

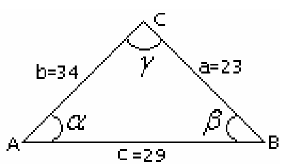
$\underline{\beta = 80.16^0}$

4)

De la ley de los cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

despejando $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(34)^2 + (29)^2 - (23)^2}{2(34)(29)}$

$\cos\alpha \cong 0.7444$; $\alpha = \cos^{-1} 0.7444$; $\underline{\alpha = 41.89^0}$



Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta}$; $sen\beta = \dfrac{bsen\alpha}{a}$

$sen\beta = \dfrac{34 sen 41.89^0}{23} \cong 0.9870$; $\beta = sen^{-1} 0.9870$; $\underline{\beta = 80.75^0}$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 122.64^0$

$\underline{\gamma = 57.36^0}$

5) Por la ley de los cosenos:

$$(QR)^2 = q^2 + r^2 - 2qr\cos 60^0 = (493)^2 + (315)^2 - 2(493)(315)(0.5)$$

$$(QR)^2 = 243049 + 99225 - 155295 = 186979$$

$QR = \sqrt{186979} = \underline{432.41}$ metros

6) Por la suma de ángulos internos: $V = 180^0 - \left(63^0 + 38^0\right) = 79^0$

Por la ley de los senos: $\dfrac{VU}{sen63^0} = \dfrac{TU}{sen79^0}$

$VU = \dfrac{TUsen63^0}{sen79^0} = \dfrac{0.8(0.8910)}{0.9616}$; $\underline{VU = 0.726\,[Km]}$

Por la ley de los cosenos: $(VT)^2 = (TU)^2 + (VU)^2 - 2(TU)(VU)\cos 38^0$

$(VT)^2 = 0.2517$; $VT = \sqrt{0.2517} = \underline{0.502\,[Km]}$ es más conveniente el banco T

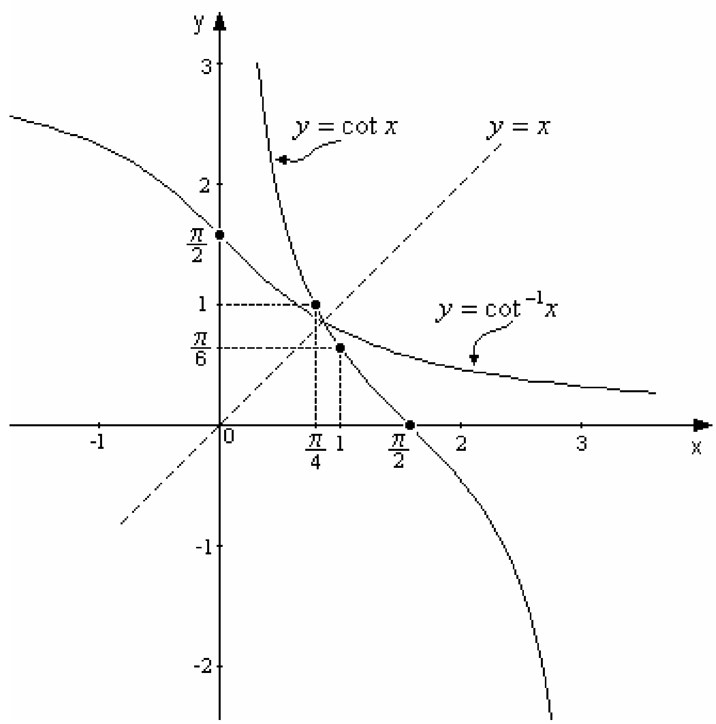
2.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1) La función $y=\cot x$ tiene dominio $D=\mathbb{R}-\{x|x\in n\pi, n\in\mathbb{Z}\}$ y rango $R=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, para que su inversa $y=\cot^{-1}(x)$ también sea función hay que restringir el dominio a $D=(0,\pi)$ conservando su rango $R=(-\infty,\infty)$. Por lo tanto el dominio de la inversa es $D=(-\infty,\infty)$ y su rango $R=(0,\pi)$ (se intercambian los papeles).

Con tu calculadora científica puedes calcular valores (puntos de la gráfica) de la función si $y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$

x	$\cot x=\frac{1}{\tan x}$
$\frac{\pi}{6}=30^0$	1.73
$\frac{\pi}{4}=45^0$	1.00
$\frac{\pi}{3}=60^0$	0.58
$\frac{\pi}{2}=90^0$	0.00
$\frac{2}{3}\pi=120^0$	-0.58
$\frac{3}{4}\pi=135^0$	-1.00
$\frac{5}{6}\pi=150^0$	-1.73

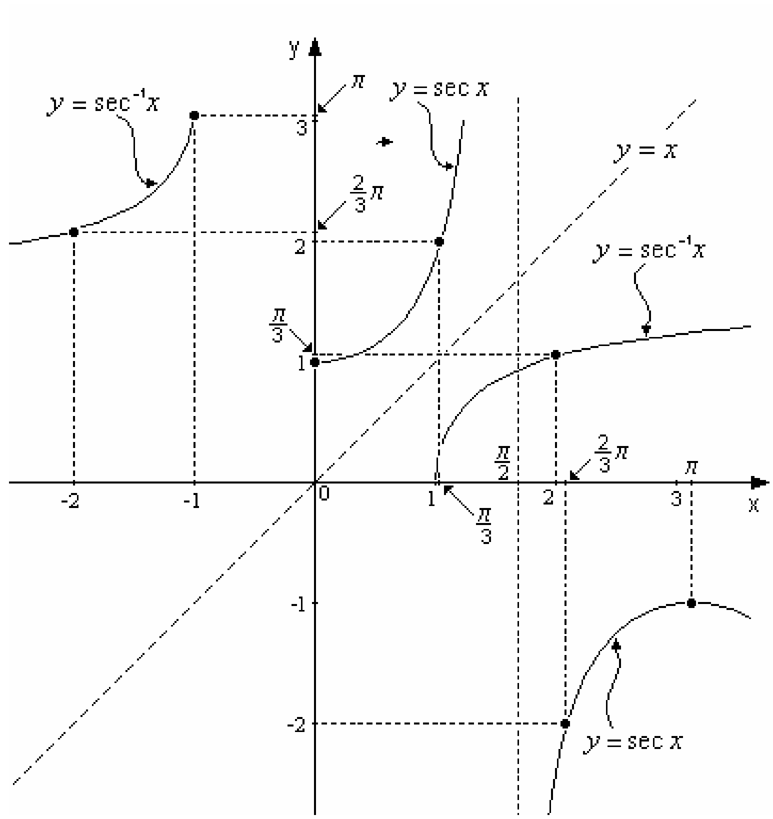
x	$\cot^{-1}x$
1.73	$\frac{\pi}{6}=0.52$
1.00	$\frac{\pi}{4}=0.79$
0.58	$\frac{\pi}{3}=1.05$
0.00	$\frac{\pi}{2}=1.57$
-0.58	$\frac{2}{3}\pi=2.09$
-1.00	$\frac{3}{4}\pi=2.36$
-1.73	$\frac{5}{6}\pi=2.62$



2) $y=\sec x$, tiene dominio $D=\mathbb{R}-\left\{x\middle|x=\pm(2n-1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{N}\right\}$(todos los reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$) y su rango son todos los reales mayores que uno y menores que menos uno, o sea $R=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Para que su inversa $y=\sec^{-1}(x)$ sea función se debe restringir su dominio de 0 a π quitando $\frac{\pi}{2}$, o sea $D=[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ y conservando su rango $R=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Por lo tanto el dominio de la inversa es $D=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y su rango $R=[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (intercambiando los papeles.

x	$\sec x$
0.00	1.00
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	1.15
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	1.41
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	2.00
$\frac{2}{3}\pi = 120^0$	-2.00
$\pi = 180^0$	-1.00

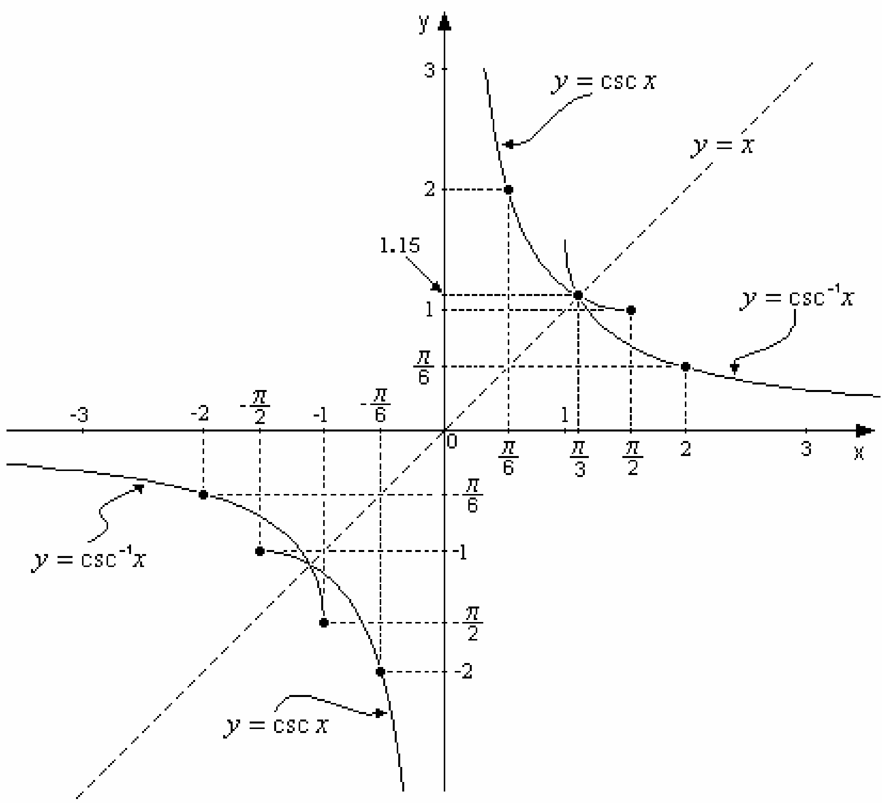
x	$\sec^{-1} x$
1.00	0.00
1.15	$\frac{\pi}{6} = 0.52$
1.41	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
2.00	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
-2.00	$\frac{2}{3}\pi = 2.09$
-1.00	$\pi = 3.14$



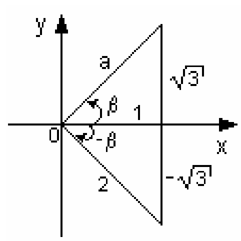
3) $y = \csc x$ tiene dominio $D = \mathbb{R} - \{x | x \in n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ o sea todos los números reales diferentes a los múltiplos enteros de π y su rango $R = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Para que su inversa $y = \csc^{-1}(x)$ sea función hay que restringir el dominio a $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ conservando su rango $R = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Por lo tanto, el dominio de la inversa es $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y su rango $R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (se intercambian los papeles).

x	$\csc x = \frac{1}{sen x}$
$-\frac{\pi}{2} = -90^0$	-1.00
$-\frac{\pi}{3} = -60^0$	-1.15
$-\frac{\pi}{4} = -45^0$	-1.41
$-\frac{\pi}{6} = -30^0$	-2.00
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	2.00
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	1.41
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	1.15
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	1.00

x	$\csc^{-1} x$
-1.00	$-\frac{\pi}{2} = -1.57$
-1.15	$-\frac{\pi}{3} = -1.05$
-1.41	$-\frac{\pi}{4} = -0.79$
-2.00	$-\frac{\pi}{6} = -0.52$
2.00	$\frac{\pi}{6} = 0.52$
1.41	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
1.15	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
1.00	$\frac{\pi}{2} = 1.57$



4) Sea $\beta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$, se busca un ángulo β comprendido en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente sea $\frac{-\sqrt{3}}{1}$, esto es: $\tan\beta = -\frac{\sqrt{3}}{1}$, lo cual resulta que β está entre 0 y $-\frac{\pi}{2}$ (ver figura), por lo que el único ángulo dentro de $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ es $\beta = -60^0 = -\frac{\pi}{3}$.



Por el Teorema de Pitágoras

$$a = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

5) Si $\alpha = sen^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$, entonces $sen\alpha = -\frac{4}{5}$, donde el ángulo α debe estar dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y como la razón $-\frac{4}{5}$ es negativa, entonces α debe estar entre $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ (ver figura), por lo tanto $\tan\left[sen^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right] = \tan(-\alpha) = -\frac{4}{3}$.

Por el Teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$