SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO VII

7.3. CRITERIOS PARA IDENTIFICAR A LA CÓNICA QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1) $2x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2-8x-4y+8=0$

- $B^2-4AC=(2)^2-4(2)\left(\frac{1}{2}\right)=4-4=0$
- Es una PARÁBOLA
- Su eje rota un ángulo “α” respecto a los ejes x,y.
- $F=8$, indica que la parábola no pasa por el origen.

2) $5x^2-2xy+2y^2-2y-71=0$

- $B^2-4AC=(-2)^2-4(5)(2)=4-50=-46$
- Es una ELIPSE.
- Sus ejes rotan un ángulo “α” respecto a los ejes x,y.
- Si $D=0$, el centro de la elipse está sobre el eje “y”.
- $F=-71$, indica que la elipse no pasa por el origen.

3) $16x^2-25y^2-400=0$

- Como $B=0$, $A=16$ y $C=-25$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x,y.
- Si $D=E=0$, su centro coincide con el origen.
- $F=-400$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

4) $16x^2-9y^2+96x-72y-144=0$

- Como $B=0$, $A=16$ y $C=-9$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x,y.
- Si $D=96$ y $E=-72$, indica que el centro está fuera del origen.
- $F=-400$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

5) $-3x^2 - 3y^2 + 18x + 18y - 27 = 0$

- Como $B = 0$, $A = C = -3$, es una CIRCUNFERENCIA.
- Si $D = 18$, $E = 18$, el centro está fuera del origen.
- $F = -27$, indica que la circunferencia no pasa por el origen.

6) $3x^2 + 4xy + -6x + 8 = 0$

- Si $B = 4$, $B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(3)(0) = 16$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes rotan un ángulo "α" respecto a los ejes x, y.
- Si $D = -6$, $E = 0$, indican que el centro está sobre el eje "x".
- $F = 8$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

7) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

- Si $B = 0$, $A = C = 1$, es una CIRCUNFERENCIA.
- Si $D = E = 0$, la circunferencia tiene centro en el origen.
- $F = -9$, indica que la circunferencia no pasa por el origen.

8) $x^2 - 4xy + 2y^2 = 0$

- $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8$, es una HIPÉRBOLA.
- Como $D = E = 0$, es una hipérbola que degenera en un par de rectas que se cortan.

9) $y^2 - 9x = 0$

- Si $B = 0$, $A = 0$ y $C = 1$, es una PARÁBOLA.
- Su eje es paralelo al eje "x".
- $F = 0$, la parábola pasa por el origen.

10) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2 = 0$

- $B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes rotan un ángulo "α" respecto de los ejes x, y.

- Si $D=-2$, $E=0$, el centro está sobre el eje "x".
- $F=-2$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

7.4. EXCENTRICIDAD

1) $F(2,-3)$; directriz: $x=3$; $e=\frac{3}{2}$

$\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}{x-3}=\frac{3}{2}$; $4y^2-5x^2+38x+24y-29=0$; Es una HIPÉRBOLA.

2) $F(0,4)$; directriz: $y=-1$; $e=0$

$\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}}{y+1}=0$; $x^2+y^2-8y+16=0$

Es una CIRCUNFERENCIA que degenera en el punto $P(0,4)$.

3) $F(4,-2)$; directriz: $y=2$; $e=\frac{1}{2}$

$\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}}{y-2}=\frac{1}{2}$; $4x^2+3y^2-32x+20y+76=0$; Es una ELIPSE.

4) $F(0,0)$; directriz: $x=-2$; $e=1$

$\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}{x+2}=1$; $y^2-4x-4=0$; Es una PARÁBOLA horizontal.

5) $F(0,-3)$; directriz: $y=1$; $e=3$

$\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}}{y-1}=3$; $x^2-8y^2+24y=0$; Es una HIPÉRBOLA.

7.5. TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

TRASLACIÓN.

1) $4x^2 - y^2 + 24x + 6y + 23 = 0$ (Hipérbola)

Si $x = x'+h$, $y = y'+k$

$4x'^2 - y'^2 + (8h + 24)x' - (2k - 6)y' + 4h^2 - k^2 + 24h + 6k + 23 = 0$

$(h,k) = (-3,3)$; $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$

2) $3x^2 + 12x - 2y + 6 = 0$ (Parábola)

Si $x = x'+h$, $y = y'+k$

$3x'^2 + (6h + 12)x' - 2y' + 3h^2 + 12h - 2k + 6 = 0$

$(h,k) = (-2,-3)$; $3x'^2 - 2y' = 0$

3) $x^2 + 4y^2 + 4x + 24y + 36 = 0$ (Elipse)

Si $x = x'+h$, $y = y'+k$

$x'^2 + 4y'^2 + (2h + 4)x' - (8k + 24)y' + h^2 + 4k^2 + 4h + 24k + 36 = 0$

$(h,k) = (-2,-3)$; $x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0$

4) $2y^2 - 4y - x - 1 = 0$ (Parábola)

Si $x = x'+h$, $y = y'+k$

$2y'^2 + (4k - 4)y' - x' + 2k^2 - 4k - h - 1 = 0$

$(h,k) = (-3,1)$; $2y'^2 - x' = 0$

5) $16y^2 - 4x^2 - 16x + 96y + 64 = 0$ (Hipérbola)

Si $x = x'+h$, $y = y'+k$

$16y'^2 - 4x'^2 + (32k + 96)y' - (8h + 16)x' + 16k^2 - 4h^2 - 16h + 96k + 64 = 0$

$(h,k) = (-2,-3)$; $16y'^2 - 4x'^2 - 64 = 0$

ROTACIÓN.

1) $3x^2-10xy-3y^2+11x-13y+21=0$

$\tan 2\alpha=\frac{-5}{3}$; $\cos 2\alpha=\frac{-3}{\sqrt{34}}$; $sen\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$; $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$; $\alpha=60.48^0$

$x=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}-y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$; $y=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}+y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$

2) $2x^2-2xy+y^2+4x-6y+18=0$

$\tan 2\alpha=\frac{-2}{1}=-2$; $\cos 2\alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}}$; $sen\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$; $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$; $\alpha=58.28^0$

$x=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}-y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$; $y=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}+y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

3) $2x^2-2xy+2y^2+3x=0$

Como $A=C$; $\alpha=45^0$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$; $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$

4) $4x^2-2xy+2y^2+x-4=0$

$\tan 2\alpha=-1$; $\cos 2\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}$; $sen\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; $\alpha=67.5^0$

$x=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}-y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; $y=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}+y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

5) $x^2-2xy+2y^2-x-1=0$

$\tan 2\alpha=2$; $\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $sen\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$; $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$; $\alpha=31.72^0$

$x=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}-y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$; $y=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}+y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$